

И. С. АРЖАНЫХ

**НОВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЫЧИСЛЕНИИ ВЕКТОРА
ПО ЕГО ВИХРЮ И РАСХОЖДЕНИЮ**

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 4 V 1951)

Названная задача, как известно, имеет большое значение для теории поля; в ряде проблем гидродинамики и электродинамики она занимает центральное место. Состоит задача в следующем: в области $Q + S$ определить правильный (Q внутри S) или регулярный (Q вне S) вектор \mathbf{v} , удовлетворяющий условиям:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \vec{\Omega}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = P \quad (\text{внутри } Q), \quad (\mathbf{n}\mathbf{v}) = F \quad (\text{на } S).$$

В настоящее время известны два способа ее решения: 1) метод аналитического продолжения ⁽¹⁾ за пределы Q вектора $\vec{\Omega}$ с соблюдением непрерывности нормальной проекции Ω_n при переходе через границу S , 2) метод Пуанкаре — Дельсарта ⁽²⁾, основанный на решении системы сингулярных интегральных уравнений.

Ниже указан новый способ определения \mathbf{v} , основанный на решении классических проблем Неймана и Дирихле для области $Q + S$.

Будем предполагать, что замкнутая поверхность S гладкая в смысле Ляпунова; нормаль $\mathbf{n}(s)$ направим вне Q .

Лемма 1. Если вектор $\vec{\Omega}$ имеет структуру

$$\vec{\Omega} = \mathbf{R} + \operatorname{rot} \mathbf{v}_0, \quad (\mathbf{n}\mathbf{R}) = 0, \quad (1)$$

то задача о вычислении вектора \mathbf{v} эквивалентна проблеме Неймана. Доказательство. Будем искать решение в виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \operatorname{rot} \vec{\psi} + \operatorname{grad} \varphi, \quad \vec{\psi}(p) = \frac{1}{4\pi} \int_Q \frac{\mathbf{R}(q)}{r(p, q)} dq. \quad (2)$$

Вычислим

$$\operatorname{div} \vec{\psi} = - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} (\mathbf{n}\mathbf{R}) ds + \frac{1}{4\pi} \int_Q \frac{\operatorname{div} \mathbf{R}}{r(p, q)} dq = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{v}_0 + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\psi} = \operatorname{rot} \mathbf{v}_0 = \nabla^2 \vec{\psi} = \operatorname{rot} \mathbf{v}_0 + \mathbf{R} = \vec{\Omega}.$$

Чтобы удовлетворить оставшимся уравнениям, необходимо определить φ :

$$\nabla^2 \varphi = P - \operatorname{div} \mathbf{v}_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = F - (\mathbf{n}\mathbf{v}_0) - (\mathbf{n} \operatorname{rot} \vec{\psi}), \quad (3)$$

т. е. необходимо решить проблему Неймана. Если $N(p, q)$ — функция Грина этой проблемы, то

$$\begin{aligned} \varphi(p) = & \frac{1}{4\pi} \int_Q N(p, q) (\operatorname{div} \mathbf{v}_0 - P) dq + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_S N(p, s) (F - (\mathbf{n}\mathbf{v}_0) - (\mathbf{n} \operatorname{rot} \vec{\psi})) ds. \end{aligned} \quad (4)$$

Существует много задач математической физики, в которых выполнено представление $\vec{\Omega}$ в виде (1). Рассмотрим один важный для гидродинамики пример. Пусть S — твердая оболочка, ограничивающая несжимаемую жидкость Q , находящуюся в состоянии вихревого установившегося движения под действием потенциальных массовых сил. Вектор относительной скорости \mathbf{v} удовлетворяет уравнениям

$$[\operatorname{rot} \mathbf{v} + 2\vec{\omega}, \mathbf{v}] + \operatorname{grad} H = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad v_n = 0.$$

Для существования интеграла Громеко — Прандтля $H = C$ достаточно, чтобы выполнялись уравнения:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = -2\vec{\omega} + \mathfrak{D}\mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad v_n = 0.$$

Здесь мы имеем $\mathbf{v}_0 = [\mathbf{q}\vec{\omega}]$, $\mathbf{R} = \mathfrak{D}\mathbf{v}$. Следовательно, указанными выше вычислениями получим интегральное уравнение для вектора \mathbf{v} .

Существуют и такие задачи, где представление (1) заранее не дано. Примером может служить следующая задача электродинамики: в объеме Q происходит электромагнитный процесс

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad H_n = h, \quad (\mathbf{H})_{t=0} = \mathbf{H}_0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad E_n = e, \quad (\mathbf{E})_{t=0} = \mathbf{E}_0.$$

Построим интегральные уравнения для изображений по Лапласу напряженностей магнитного и электрического поля:

$$\mathbf{v}_1 = \int_0^\infty \exp(-\eta t) \mathbf{H} dt, \quad \mathbf{v}_2 = \int_0^\infty \exp(-\eta t) \mathbf{E} dt.$$

Для этого необходимо решить задачу об определении двух векторов \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 , зная, что

$$\vec{\Omega}_1 = \frac{1}{c} \mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} (4\pi\sigma + \eta) \mathbf{v}_2, \quad P_1 = 0, \quad (\mathbf{n}\mathbf{v}_1) = \int_0^\infty \exp(-\eta t) h dt,$$

$$\vec{\Omega}_2 = -\frac{1}{c} \mathbf{H}_0 - \frac{1}{c} \eta \mathbf{v}_1, \quad P_2 = 4\pi \int_0^\infty \exp(-\eta t) \rho dt,$$

$$(\mathbf{n}\mathbf{v}_2) = \int_0^\infty \exp(-\eta t) e dt.$$

Здесь $\vec{\Omega}_1$ и $\vec{\Omega}_2$ не представлены в виде (1).

Лемма 2. Для представления вектора $\vec{\Omega}$ в виде (1) достаточно знать функцию N и резольвенту Фредгольма $D(p, q)$ интегрального уравнения проблемы Дирихле:

а) для внутренней задачи

$$2\pi\sigma(t) - \int_S \sigma(s) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds = \int_S N(t, s) \Omega_n(s) ds; \quad (5')$$

б) для внешней задачи

$$2\pi\sigma(t) - \int_S \sigma(s) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds - \frac{1}{r_0} \int_S \sigma(s) ds = \int_S N(t, s) \Omega_n(s). \quad (5'')$$

Доказательство. Представим $\vec{\Omega}$ в виде:

$$\vec{\Omega} = (\vec{\Omega} - \text{grad } \theta) + \text{rot } \mathbf{v}_0, \quad \text{grad } \theta = \text{rot } \mathbf{v}_0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = \Omega_n. \quad (6)$$

Тогда будем иметь $\mathbf{R} = \vec{\Omega} - \text{grad } \theta$. Так как θ — гармоническая функция, то она определяется через функцию N :

$$\theta(p) = \frac{1}{4\pi} \int_S N(p, s) \Omega_n ds + \varepsilon C \quad (7)$$

($\varepsilon = 0$ для внешней задачи, $\varepsilon = 1$ для внутренней задачи). Вектор \mathbf{v}_0 представим через векторный потенциал простого слоя

$$\mathbf{v}_0 = \text{rot } \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \int_S (\sigma(s) + \varepsilon C) \frac{\mathbf{n}(s)}{r(p, s)} ds - \frac{1-\varepsilon}{2r_0} \int_S \sigma(s) ds. \quad (8)$$

Тогда

$$\theta = \varepsilon C - \frac{(1-\varepsilon)}{r_0} \int_S \sigma(s) ds - \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(s) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n(s)} ds \equiv \text{div } \mathbf{u}, \quad (9)$$

$r_0 = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|$ (точка p_0 лежит внутри S). Теперь условие $\text{grad } \theta = \text{rot } \mathbf{v}_0$ выполнено.

Приравнивая значения θ (7) и (9), после предельного перехода ($p \rightarrow t$) получим интегральные уравнения (5'), (5''). Вектор \mathbf{v}_0 определяется по формуле (8):

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_S \sigma(s) \frac{\mathbf{n}(s)}{r(p, s)} ds.$$

Доказанные леммы позволяют решить задачу о вычислении вектора по его вихрю и расхождению. Рассмотрим наиболее общую задачу этого типа:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v}_l &= \vec{\omega}_l + \sum_{k=1}^m \vartheta_{lk} \mathbf{v}_k, \quad l = 1, 2, \dots, m; \\ \text{div } \mathbf{v}_l &= \vartheta_l + \sum_{k=1}^m (\vec{\omega}_{lk} \mathbf{v}_k), \quad (\mathbf{n} \mathbf{v}_l) = f_l. \end{aligned} \quad (10)$$

Если $\vartheta_{lk} = 0$, $\vec{\omega}_{lk} = 0$, то задача расчленяется на m отдельных задач. Но мы видели, что могут быть проблемы, где ϑ_{lk} и $\vec{\omega}_{lk}$ вообще отличны от нуля.

Теорема. Краевая задача (10) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\mathbf{v}_l(p) = \mathbf{v}_l^* + \sum_{k=1}^m \int_S L_{lk}(p, s) \mathbf{v}_k(s) ds + \sum_{k=1}^m \int_Q K_{lk}(p, q) \mathbf{v}_k(q) dp, \quad (11)$$

для конструкции которой необходимо выполнить следующие вычисления:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_S N(t, s) ((\mathbf{n} \vec{\omega}_l) + \sum_{k=1}^m \vartheta_{lk} f_k) ds &= \theta_l(t); \\ \theta_l(t) - \frac{1}{2\pi} \int_S D(t, s) \theta_l(s) ds &= \sigma_l(t); \\ \vec{\psi}_l(p) &= \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma_l(s) \frac{\mathbf{n}(s)}{r(p, s)} ds, \quad \mathbf{w}_l(p) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^m \int_Q \frac{\vartheta_{lk} \vec{\omega}_k}{r(p, q)} dq; \\ \vec{\Omega}_l^0 &= \frac{1}{4\pi} \int_Q \frac{1}{r} (\vec{\omega}_l - \text{grad div } \vec{\psi}_l) dq, \quad \varphi_l^0 = -\frac{1}{4\pi} \int_S N(\mathbf{n}, \mathbf{w}_l) ds; \\ \Phi_l^0 &= \frac{1}{4\pi} \int_S N(f_l - (\mathbf{n} \text{ rot } \vec{\psi}_l) - (\mathbf{n} \text{ rot } \vec{\Omega}_l^0)) ds - \frac{1}{4\pi} \int_Q N \vartheta_l dq; \\ \mathbf{v}_l^* &= \mathbf{w}_l + \text{grad} (\varphi_l^0 + \Phi_l^0) + \text{rot} (\vec{\psi}_l + \vec{\Omega}_l^0) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\vec{v}(p, q) = \frac{1}{4\pi} \int_S N(p, s) \frac{\mathbf{n}(s)}{r(s, q)} ds, \quad \mathbf{R}(p, t) = [\vec{v}(p, t) \mathbf{n}(t)]; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{lk}(p, s) &= \mathbf{R}(p, s) \vartheta_{lk}(s), \quad \vec{\chi}_{lk}(p, q) = [\vec{v}(p, q) \nabla_q \vartheta_{lk}]; \\ \vec{v}_{lk}(p, q) &= \vec{v}(p, q) \sum_{i=1}^m \vartheta_{li}(q) \vartheta_{ik}(q); \\ \vec{\sigma}_{lk}(p, q) &= \vec{\chi}_{lk} + \vec{v}_{lk} + N(p, q) \vec{\omega}_{lk}(q). \end{aligned} \quad (14)$$

Тензоры L_{lk} и K_{lk} имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} 4\pi L_{lk} \vec{\xi}_k &\equiv \frac{\vartheta_{lk}(s)}{r(p, s)} [\vec{\xi}_k \mathbf{n}] + (\vec{\xi}_k \nabla_p) \mathbf{R}_{lk} + [\vec{\xi}_k \text{ rot}_p \mathbf{R}_{lk}], \\ 4\pi K_{lk} \vec{\xi}_k &\equiv \frac{\vec{\xi}_k}{r} \sum_{i=1}^m \vartheta_{li} \vartheta_{ik} - \frac{1}{r} [\vec{\xi}_k \nabla_q \vartheta_{lk}] - (\vec{\xi}_k \nabla_p) \vec{\sigma}_{lk} - [\vec{\xi}_k \text{ rot}_k \vec{\sigma}_{lk}]. \end{aligned} \quad (15)$$

В частности, для электродинамики следует положить:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_1 &= \frac{1}{c} \mathbf{E}_0, \quad \vec{\omega}_2 = -\frac{1}{c} \mathbf{H}_0, \quad \vartheta_{12} = \frac{1}{c} (4\pi\sigma + \eta), \quad \vartheta_{21} = -\frac{1}{c} \eta, \\ f_1 &= \int_0^\infty \exp(-\eta t) h dt, \quad f_2 = \int_0^\infty \exp(-\eta t) e dt, \quad \vec{\omega}_{lk} = 0. \end{aligned}$$

Институт математики и механики
Академии наук Узб.ССР

Поступило
20 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, М., 1938.
² Г. Вилля, Теория вихрей, М., 1936.