Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 1

МАТЕМАТИКА

А. А. ШЕСТАКОВ

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СМЫСЛЕ ЛЯПУНОВА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 28 IV 1951)

§ 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = F_s(x_1, \ldots, x_n), \quad F_s(0, \ldots, 0) = 0 \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Пусть правые части F_s в окрестности невозмущенного движения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ имеют разложения в ряды Тейлора

$$F_s(x_1, \ldots, x_n) = X_s^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) + L_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где $X_s^{(m)}$ — однородные многочлены степени m относительно всех переменных x_s, а $L_s(x_1, \ldots, x_n) = O(r^{m+1})$, $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, объединяют члены высшего порядка.

В дальнейшем изложении предполагаем, что особая точка $O(0, \ldots, 0)$ системы является изолированной и для начальных членов $X_s^{(m)}$ разложений (2) невозможны соотношения вида $X_s^{(m)} = X^{(m-k)} X_s^{(k)}$ $(s = 1, \ldots, n)$, где $X^{(m-k)}$ — однородный многочлен степени $m - k$ относительно всех x_s. Критические направления* системы (1) определяются как решения $(a_1, \ldots, a_n)$ системы алгебраических уравнений

$$x_1 : X_1^{(m)}(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = x_n : X_n^{(m)}(x_1, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Определение. Критическую прямую $x_s = a_s\tau$ (τ — параметр), на которой отношения (3) положительны (отрицательны), назовем положительной (отрицательной) критической прямой (m нечетно); луч $x_s = a_s\tau$ ($\tau > 0$ или $\tau < 0$), на котором эти отношения положительны (отрицательны), назовем положительным (отрицательным) критическим лучом (m четно).

В указанных выше предположениях имеет место теорема 1.

Теорема 1. *Если система* (1) *имеет при m нечетном по крайней мере одну положительную критическую прямую или при m четном по крайней мере одну критическую прямую, то невозмущенное движение $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ неустойчиво по Ляпунову при любом выборе функций $L_s(x_1, \ldots, x_n)$ выше чем m порядка малости.*

Доказательство. Производя над системой (1) неособое линейное преобразование:

$$x_s = b_{s1}y_1 + \cdots + b_{sn}y_n \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

---

* Направления, по которым могут входить в особую точку O интегральные кривые, назовем критическими.

мы получим:

$$\frac{dy_s}{dt} = \frac{1}{\Delta}\Delta_s(y_1, \ldots, y_n) + O(y_1^{m+1} + \ldots + y_n^{m+1}) \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

где Δ_s — определители n-го порядка, получаемые из определителя $\Delta = |b_{ik}|$ заменой элементов s-го столбца b_{is} функциями $X_i^{(m)}$, в которых x_s заменены y_s согласно (4).

Напишем систему (5) в виде

$$\frac{dy_s}{dt} = C_1^{(s)} y_1^m + \sum_{i=2}^{n} C_i^{(s)} y_i y_1^{m-1} + \sum_{\alpha} C_\alpha^{(s)} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha_n} + \\ + O(y_1^{m+1} + \ldots + y_n^{m+1}) \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

где суммирование в трех членах правых частей (6) происходит по целым числам $\alpha > 0$ при условии $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m$, $\alpha_1 \neq m-1$, $\alpha_1 \neq m$ и $O(y_1^{m+1} + \ldots + y_n^{m+1})$ — члены порядка малости высшего чем m.

В преобразовании (4) положим $b_{i1} = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $x_i = a_i$ — корень системы (3). Тогда, нетрудно видеть, имеем:

$$C_1^{(1)} = \frac{1}{\Delta} D_1(a_1, \ldots, a_n) \neq 0, \quad C_1^{(s)} = \frac{1}{\Delta} D_s(a_1, \ldots, a_n) = 0 \tag{7}$$
$$(s = 2, \ldots, n),$$

где $D_s(x_1, \ldots, x_n)$ $(s = 1, \ldots, n)$ определяются формулами:

$$D_1(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} X_1^{(m)} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_n^{(m)} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix};$$

$$D_s(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1 & b_{12} & \ldots & b_{1\,s-1} & X_1^{(m)} & b_{1\,s+1} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & b_{n2} & \ldots & b_{n\,s-1} & X_n^{(m)} & b_{n\,s-1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} \quad (s \neq 1). \tag{8}$$

Производя в системе (6) замену $y_1 = \tau$, $y_s = \tau z_{s-1}$ $(s = 2, \ldots, n)$ и учитывая (7), после небольших преобразований получим

$$\tau \frac{dz_s}{d\tau} = p_{s1} z_1 + \ldots + p_{s\,n-1} z_{n-1} + p_{sn}\tau + O(\tau^2 + z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2) \tag{9}$$
$$(s = 1, \ldots, n-1),$$

где коэффициенты p_{sk} определены формулами

$$p_{sk} = (C_k^{(s)} - \delta_{ks} C_1^{(1)}) : C_1^{(1)} \quad (\delta_{ks} \text{ — символ Кронекера}). \tag{10}$$

Раньше нами было доказано [1], что система (9) имеет по крайней мере одну 0-кривую: $z_s = \omega_s(\tau)$, $\omega_s(\tau) \to 0$ при $\tau = 0$ и, следовательно, система (6) имеет по крайней мере одно решение вида:

$$y_s = \tau\omega_s(\tau) = o(\tau) \quad (s = 2, \ldots, n).$$

Подставляя это решение в первое уравнение (6), получим

$$\frac{dy_1}{dt} = C_1^{(1)} y_1^m + o(y_1^m). \tag{11}$$

Так как $C_1^{(1)} = \frac{1}{\Delta} D_1(a_1, \ldots, a_n) = X_s^{(m)}(a_1, \ldots, a_n) : a_s > 0$, то из уравнения (11) следует неустойчивость движения $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

Теорема 2. *При n нечетном система уравнений* (1) *имеет по крайней мере одну интегральную кривую, входящую в особую точку O с определенным направлением касательной.*

Пусть в n-мерном пространстве задана сфера $S: x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$ радиуса r. Положим $x_i = r\beta_i$, так что $\beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2 = 1$, т. е. точка $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ лежит на единичной сфере. Тогда уравнения (1) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r^m R(\beta_1, \ldots, \beta_n) + L_0(r, \beta_1, \ldots, \beta_n); \\ r\frac{d\beta_i}{dt} &= r^m B_i(\beta_1, \ldots, \beta_n) + L_i(r, \beta_1, \ldots, \beta_n), \end{aligned} \tag{12}$$

где $R = \beta_1 \overline{X}_1^{(m)} + \cdots + \beta_n \overline{X}_n^{(m)}$, $B_i = \overline{X}_i^{(m)} - \beta_i R$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\overline{X}_i^{(m)}$ — значения функций $X_i^{(m)}$ на единичной сфере.

Исключая параметр t, запишем систему (12) в виде

$$r\frac{d\beta_i}{dt} = \frac{B_i(\beta_1, \ldots, \beta_n) + r^{-m} L_i(r, \beta_1, \ldots, \beta_n)}{R(\beta_1, \ldots, \beta_n) + r^{-m} L_0(r, \beta_1, \ldots, \beta_n)} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что система уравнений

$$B_i(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

эквивалентна системе (3), определяющей критические направления.

Покажем, что уравнения (14) имеют по крайней мере один вещественный корень. Для этого рассмотрим последовательность вложения друг в друга сфер S_k: $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r_k^2$ таких, что $r_k \to 0$ при $k \to \infty$. В силу непрерывности функций B_i, R, L_i имеем непрерывное поле направлений на сферах S_k. Каждому направлению отнесем вектор $(B_1 + L_1 r^{-m}, \ldots, B_n + L_n r^{-m})$, координаты которого взяты по касательным к координатным линиям $\beta_i = \mathrm{const}$. В силу известной топологической теоремы на каждой сфере $r = r_k$ измерения $n - 1$ (n нечетно) существует точка $(\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \ldots, \beta_n^{(k)})$, в которой все

$$B_i(\beta_1^{(k)}, \ldots, \beta_n^{(k)}) + r_k^{-m} L_i(r_k, \beta_1^{(k)}, \ldots, \beta_n^{(k)}) = 0\,*.$$

Рассмотрим последовательность направлений $(\beta_1^{(k)}, \ldots, \beta_n^{(k)})$, из которой выделим сходящуюся подпоследовательность $(\beta_1^{k_1}, \ldots, \beta_n^{k_n})$; $\lim\limits_{k_i \to \infty} \beta_i^{k_i} = \beta_i^0$. Ясно, что направление $(\beta_1^0, \ldots, \beta_n^0)$ является критическим. В самом деле, пусть $|B_i(\beta_1^0, \ldots, \beta_n^0)| = \varepsilon \neq 0$. Тогда при $k_i > N$, где N достаточно велико, будем иметь $|B_i(\beta_1^{k_1}, \ldots, \beta_n^{k_n})| > \varepsilon/2$ и $|L(r_{k_i}, \beta_1^{k_1}, \ldots, \beta_n^{k_n})| < \varepsilon/4$ или $|B_i + r_{k_i}^{-m} L_i| > \varepsilon/4$ $(i = 1, \ldots, n)$. Мы пришли к противоречию, что и доказывает, что направление $(\beta_1^0, \ldots, \beta_n^0)$ является критическим. Ранее нами было доказано [1], что система (1) имеет по крайней мере одну 0-кривую, входящую в O по направлению $(\beta_1^0, \ldots, \beta_n^0)$**. Этим и доказано существование 0-кривой у системы (1).

---

* См., например, [3].

** Размерность семейства 0-кривых, входящих в O по направлению $(\beta_1^0, \ldots, \beta_n^0)$, определяется числом корней λ_s с $\operatorname{Re}\lambda_s > 0$ характеристического уравнения, соответствующего данному направлению.

Из теорем 1 и 2 вытекает теорема 3.

Теорема 3. *Если n нечетно, то невозмущенное движение системы* (1) *всегда неустойчиво, если разложения в ряды правых частей начинаются с одной и той же степени m, где m четно.*

В этой теореме ограничения на правые части (1) те же, что и в теореме 1.

§ 2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dz_s}{dt} = C_{s1}z_1 + \ldots + C_{sl}z_l + Z_s(z_1, \ldots, z_l) \quad (s = 1, \ldots, l), \tag{15}$$

где C_{sj} — постоянные и Z_s — аналитические функции от z_j, разложения которых начинаются с членов не ниже, чем второй степени.

Пусть характеристическое уравнение системы (15) имеет k корней с $\operatorname{Re}\lambda_s < 0$ и n корней, равных нулю, и система (15) с помощью неособого линейного преобразования может быть приведена к виду

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k),$$
$$\frac{dy_l}{dt} = b_{i1}y_1 + \ldots + b_{ik}y_k + Y_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) \tag{16}$$
$$(s = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k;\ l = k + n),$$

при этом все корни λ_s уравнения $|b_{ij} - \delta_{ij}\lambda| = 0$ имеют $\operatorname{Re}\lambda_s < 0$ $(s = 1, \ldots, k)$.

Рассмотрим «укороченную» систему уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) = \bar{X}_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{17}$$

Предположим, что разложения функций $\bar{X}_s$ в ряды Маклорена начинаются с членов одной и той же степени m. На основании принципа сведения И. Г. Малкина [2], мы можем заключить, что если невозмущенное движение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ неустойчиво в силу уравнений (17), то невозмущенное движение $z_1 = 0, \ldots, z_l = 0$ будет также неустойчивым в силу уравнений (15).

В указанных выше предположениях, из теорем 1 и 3 вытекает теорема 4.

Теорема 4. *Если «укороченная» система* (17) *при нечетном m имеет по крайней мере одну положительную критическую прямую, а при четном m по крайней мере одну критическую прямую, то невозмущенное движение $z_1 = \ldots = z_l = 0$ системы* (15) *будет неустойчивым независимо от членов Z_s выше первого порядка малости.*

В частности, если число нулевых характеристических корней у системы (15) *нечетно, а число m четно, то невозмущенное движение $z_1 = \ldots = z_l = 0$ системы* (15) *неустойчиво, независимо от членов Z_s выше первого порядка малости.*

Московский электромеханический институт
инженеров железнодорожного транспорта
им. Ф. Э. Дзержинского

Поступило
21 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Шестаков, ДАН, **62**, № 2 и № 5 (1949). [2] И. Г. Малкин, Прикладн. матем. и мех., **6** (1942). [3] Л. С. Понтрягин, Основы комбинаторной топологии, М.—Л., 1947, стр. 142.