Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 1

МАТЕМАТИКА

И. М. РАПОПОРТ

О СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 20 IV 1951)

Метод рассмотрения асимптотического поведения решений линейных дифференциальных уравнений, указанный нами в статье [1], позволяет детально исследовать сингулярную краевую задачу для обыкновенных самосопряженных линейных дифференциальных уравнений произвольного четного порядка [2]. Спектр самосопряженных дифференциальных операторов высших порядков удается изучить с той же полнотой, с какой он изучен у дифференциального оператора второго порядка [3, 4]. В этой статье мы ограничиваемся для простоты рассмотрением самосопряженного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[a(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]+\frac{d}{dx}\left[b(x)\frac{dy}{dx}\right]+c(x)y+\lambda y, \quad a(x)>0, \tag{1}$$

в интервале $(0, \infty)$.

Рассмотрим сперва случай, в котором $a'(x)\in L(0,\infty)$, $b(x)\in L(0,\infty)$, $c(x)\in L(0,\infty)$. Будем считать, что $a(\infty)=1$. Зададимся сперва краевыми условиями:

$$\alpha_1 D_1 y(0)+\alpha_2 D_2 y(0)=\alpha_3 D_3 y(0)+\alpha_4 y(0)=0,$$
$$\beta_1 D_1 y(b)+\beta_2 D_2 y(b)=\beta_3 D_3 y(b)+\beta_4 y(b)=0,$$
$$\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0, \quad \alpha_3^2+\alpha_4^2\neq 0, \quad \beta_1^2+\beta_2^2\neq 0, \quad \beta_3^2+\beta_4^2\neq 0, \quad \beta_1^3\beta_3\neq\beta_2^3\beta_4,$$
$$D_1 y=\frac{dy}{dx}, \quad D_2 y=a(x)\frac{d^2y}{dx^2}, \quad D_3 y=\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]+b(x)\frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Пользуясь методом, изложенным нами в статье [1], можно построить при $\lambda>0$ четыре решения уравнения (1) $y_i(x,\lambda)$, $i=1, 2, 3, 4$, удовлетворяющие при больших значениях x асимптотическим соотношениям:

$$D_j y_1(x,\lambda)=\frac{\partial^j\cos s\xi}{\partial\xi^j}[1+o(1)], \quad D_j y_2(x,\lambda)=\frac{\partial^j\sin s\xi}{\partial\xi^j}[1+o(1)], \tag{3}$$
$$D_j y_3(x,\lambda)=\frac{\partial^j\exp(-s\xi)}{\partial\xi^j}[1+o(1)],$$
$$D_j y_4(x,\lambda)=\frac{\partial^j\exp s\xi}{\partial\xi^j}[1+o(1)], \quad j=1, 2, 3, 4,$$

где $s=|\lambda^{1/4}|$, $\xi(x)=\int\limits_0^x a^{-1/4}(x)\,dx$, $D_0 y=\frac{d^0y}{dx^0}=y$. Функции $D_j y_i(x,\lambda)$, $i=1, 2, 3, 4$, $j=1, 2, 3, 4$, при любом фиксированном конечном значении $x\geqslant 0$ будут голоморфными функциями параметра λ в каждой точке вещественной полуоси $0<\lambda<\infty$. Построим теперь функцию

$$y(x,\lambda)=k_1(\lambda)y_1(x,\lambda)+k_2(\lambda)y_2(x,\lambda)+k_3(\lambda)y_3(x,\lambda), \tag{4}$$
$$k_1^2(\lambda)+k_2^2(\lambda)=\frac{2}{\pi},$$

удовлетворяющую заданным начальным условиям. Для определения функций $k_i(\lambda)$ получим уравнения:

$$\sum_{i=1}^{3} p_i(\lambda)\, k_i(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} q_i(\lambda)\, k_i(\lambda) = 0,$$

$$p_i(\lambda) = \alpha_1 D_1 y_i(0, \lambda) + \alpha_2 D_2 y_i(0, \lambda),\ q_i(\lambda) = \alpha_3 D_3 y_i(0, \lambda) + \alpha_4 y_i(0, \lambda). \qquad (5)$$

Введем обозначение $\Delta_{ij}(\lambda) = p_i(\lambda)\, q_j(\lambda) - p_j(\lambda)\, q_i(\lambda)$. Мы удовлетворим уравнениям (5) и условию нормирования (4), полагая

$$k_1(\lambda) = r(\lambda)\,\Delta_{23}(\lambda), \quad k_2(\lambda) = -r(\lambda)\,\Delta_{13}(\lambda), \quad k_3(\lambda) = r(\lambda)\,\Delta_{12}(\lambda),$$
$$r(\lambda) = \sqrt{2/\pi}\,[\Delta_{13}^2(\lambda) + \Delta_{23}^2(\lambda)]^{-1/2}. \qquad (6)$$

Рассмотрим поведение функций $k_i(\lambda)$ в окрестности какой-либо точки $\lambda = \lambda_0$, в которой функция $\Delta_{13}^2(\lambda) + \Delta_{23}^2(\lambda) = 0$. Функции $y_i(x, \lambda)$, будучи решениями уравнения (1), связаны соотношениями:

$$y_i(x, \lambda)\, D_3 y_j(x, \lambda) - y_j(x, \lambda)\, D_3 y_i(x, \lambda) -$$
$$- D_1 y_i(x, \lambda)\, D_2 y_j(x\ \lambda) + D_1 y_j(x, \lambda)\, D_2 y_i(x, \lambda) = c_{ij}(\lambda). \qquad (7)$$

Из асимптотических формул (3) следует: $c_{13}(\lambda) = c_{23}(\lambda) = 0$, $c_{12}(\lambda) = -2s^3$. Допустим, что $\alpha_2 \neq 0$ и $\alpha_3 \neq 0$. Соотношения (7) позволяют установить тождества:

$$\begin{aligned}&\Delta_{12}(\lambda)\, y_3(0, \lambda) = \Delta_{13}(\lambda)\, y_2(0, \lambda) - \Delta_{23}(\lambda)\, y_1(0, \lambda) + 2s^3 \alpha_3 p_3(\lambda),\\ &\Delta_{12}(\lambda) D_1 y_3(0, \lambda) = \Delta_{13}(\lambda) D_1 y_2(0, \lambda) - \Delta_{23}(\lambda) D_1 y_1(0, \lambda) + 2s^3 \alpha_2 q_3(\lambda),\end{aligned} \quad 0 < \lambda < \infty. \ (8)$$

Если $\Delta_{12}(\lambda_0) \neq 0$, то из соотношений $\Delta_{13}(\lambda_0) = \Delta_{23}(\lambda_0) = 0$ следует: $p_3(\lambda_0) = q_3(\lambda_0) = 0$. Тогда $y_3^2(0, \lambda_0) + D_1^2 y_3(0, \lambda_0) \neq 0$, так как иначе функция $y_3(x, \lambda_0)$ была бы тождественным нулем. Соотношения (8) приводят нас к противоречию, следовательно, $\Delta_{12}(\lambda_0) = 0$. К тому же виду придем в случаях: $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ и $\alpha_4 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_4 \neq 0$. Аналогичными приемами доказывается неравенство:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} [\Delta_{13}^2(\lambda) + \Delta_{23}^2(\lambda)]\, \Delta_{12}^{-2}(\lambda) \neq 0. \qquad (9)$$

Таким образом, функции $k_i(\lambda)$ при $\lambda \to \lambda_0$ имеют конечные пределы и будут непрерывными при надлежащих переменах знака у функции $r(\lambda)$. Мы приходим к следующей лемме.

Лемма 1. *Дифференциальное уравнение* (1) *имеет решение* $y(x, \lambda)$ *вида* (4), *удовлетворяющее заданным начальным условиям и непрерывное относительно* λ *в любом интервале* $0 < \lambda' \leqslant \lambda \leqslant \lambda'' < \infty$.

Введем, далее, обозначение $\Phi_+(\lambda) = \Delta_{13}^2(\lambda) + \Delta_{23}^2(\lambda)$ и построим функцию

$$y^*(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{3} k_i^*(\lambda)\, y_i(x, \lambda) + y_4(x, \lambda), \quad \Delta_{23}(\lambda)\, k_1^*(\lambda) - \Delta_{13}(\lambda)\, k_2^*(\lambda) = 0, \quad (10)$$

удовлетворяющую заданным начальным условиям. Для определения функций $k_i^*(\lambda)$ получим систему уравнений, определитель которой отличен от нуля, если $\Phi_+(\lambda) \neq 0$. Будем искать теперь собственные функции краевой задачи в виде линейной комбинации $y(x, \lambda) + \delta(\lambda, b)\, y^*(x, \lambda)$. Заданные условия (2) в точке $x = b$ и асимптотические формулы (3) приводят при больших значениях b к соотношениям:

$$\xi(b)\,(s_{k+1} - s_k) = \pi + o(1), \quad \delta(\lambda, b) = O(e^{-s\xi(b)}),$$
$$\xi^{-1}(b) \int_0^b (y + \delta y^*)^2\, dx = \frac{1}{\pi} + o(1), \qquad (11)$$

справедливым в любом интервале (λ', λ''), не содержащем нулей функции $\Phi_+(\lambda)$ ($\lambda_k = s_k^4$ — k-е собственное число). Обозначим через Ω_a класс функций $f(x)$, непрерывных вместе со своими первыми четырьмя производными, удовлетворяющих заданным начальным условиям и равных нулю при $x > a$. Введем далее обозначение:

$$S(\lambda', \lambda'', b) = \sum_{k=k'(b)}^{k''(b)} \left[\int_0^b y_k^2(x, b)\, dx\right]^{-1} \left[\int_0^a f(x)\, y_k(x, b)\, dx\right]^2, \tag{12}$$

где $y_k(x, b)$ — k-я собственная функция, а числа $k'(b)$ и $k''(b)$ определяются условиями: $\lambda_{k'-1} \leqslant \lambda'$, $\lambda_{k'} > \lambda'$, $\lambda_{k''} < \lambda''$, $\lambda_{k''+1} \geqslant \lambda''$. Если интервал (λ', λ'') не содержит нулей функции $\Phi_+(\lambda)$, то, согласно (11):

$$\lim_{b\to\infty} S(\lambda', \lambda'', b) = \int_{s'}^{s''} F^2(s)\, ds, \quad F(s) = \int_0^a f(x)\, y(x, \lambda)\, dx, \; s'^4 = \lambda', \; s''^4 = \lambda''; \tag{13}$$

если же интервал (λ', λ'') содержит нули функции $\Phi_+(\lambda)$, предельное соотношение (13) принимает вид:

$$\lim_{b\to\infty} S(\lambda', \lambda'', b) = \int_{s'}^{s''} F^2(s)\, ds + \sum_{l=l'}^{l''} \left[\int_0^a f(x)\, y_+(x, \lambda_l)\, dx\right]^2,$$

$$y_+(x, \lambda) = \left[\int_0^\infty y_3^2(x, \lambda)\, dx\right]^{-1/2} y_3(x, \lambda), \tag{14}$$

где $\lambda_{l'}, \lambda_{l'+1}, \ldots, \lambda_{l''}$ — нули функции $\Phi_+(\lambda)$ в интервале (λ', λ'').

При $\lambda < 0$ уравнение (1) имеет четыре решения $\eta_i(x, \lambda)$, $i = 1, 2, 3, 4$, удовлетворяющие при больших x асимптотическим соотношениям:

$$D_j\eta_1(x, \lambda) = \frac{\partial^j}{\partial\xi^j}\left[\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} s\xi\right) \cos\frac{\sqrt{2}}{2} s\xi\right][1 + o(1)],$$

$$D_j\eta_2(x, \lambda) = \frac{\partial^j}{\partial\xi^j}\left[\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} s\xi\right) \sin\frac{\sqrt{2}}{2} s\xi\right][1 + o(1)],$$

$$D_j\eta_3(x, \lambda) = \frac{\partial^j}{\partial\xi^j}\left[\exp\frac{\sqrt{2}}{2} s\xi \cos\frac{\sqrt{2}}{2} s\xi\right][1 + o(1)],$$

$$D_j\eta_4(x, \lambda) = \frac{\partial^j}{\partial\xi^j}\left[\exp\frac{\sqrt{2}}{2} s\xi \sin\frac{\sqrt{2}}{2} s\xi\right][1 + o(1)], \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{15}$$

Введем обозначение $\Phi_-(\lambda) = [(\alpha_1 D_1\eta_1 + \alpha_2 D_2\eta_1)(\alpha_3 D_3\eta_2 + \alpha_4\eta_2) - (\alpha_1 D_1\eta_2 + \alpha_2 D_2\eta_2)(\alpha_3 D_3\eta_1 + \alpha_4\eta_1)]_{x=0}$. При $-\infty < \lambda' < \lambda'' < 0$ на основании (15) найдем, что $\lim\limits_{b\to\infty} S(\lambda', \lambda'', b) = 0$, если интервал (λ', λ'') не содержит нулей функции $\Phi_-(\lambda)$, в противном случае

$$\lim_{b\to\infty} S(\lambda', \lambda'', b) = \sum_{m=m'}^{m''} \left[\int_0^a f(x)\, y_-(x, \mu_m)\, dx\right]^2,$$

$$y_-(x, \lambda) = \varkappa_1\eta_1(x, \lambda) + \varkappa_2\eta_2(x, \lambda), \tag{16}$$

где $\mu_{m'}, \mu_{m'+1}, \ldots, \mu_{m''}$ — нули функции $\Phi_-(\lambda)$ в интервале (λ', λ''), а $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ определяются так, чтобы функции $y_-(x, \mu_m)$ удовлетворяли заданным начальным условиям и условиям нормирования $\int\limits_0^\infty y_-^2(x, \mu_m)\, dx = 1$.

Пользуясь предельными соотношениями (14) и (16), неравенствами

$$S(-\infty, -L, b),\, S(L, \infty, b) < \frac{1}{L^2}\int_0^a \left[\frac{d^2}{dx^2}\left(a\frac{d^2 f}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(b\frac{df}{dx}\right) + cf\right]^2 dx, \quad L > 0, \tag{17}$$

и равенством Парсеваля $S(-\infty, \infty, b) = \int\limits_0^a f^2(x)\,dx$, докажем существование предела $c_0^2 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{b\to\infty} S(-\varepsilon, \varepsilon, b)$ и придем к доказательству следующей леммы.

Лемма 2. *Если $f(x) \in \Omega_a$, то $F(s) \in L^2(0, \infty)$ и*

$$\int\limits_0^a f^2(x)\,dx = \int\limits_0^\infty F^2(s)\,ds + \sum_l \left[\int\limits_0^a f(x)\,y_+(x, \lambda_l)\,dx\right]^2 + \sum_m \left[\int\limits_0^a f(x)\,y_-(x, \mu_m)\,dx\right]^2 + c_0^2,$$

где суммирование осуществляется по всем нулям λ_l функции $\Phi_+(\lambda)$ и по всем нулям μ_m функции $\Phi_-(\lambda)$.

В частности, если уравнение (1) при $\lambda = 0$ не имеет решений с суммируемым квадратом, удовлетворяющих заданным начальным условиям, то $c_0 = 0$. Построив последовательность функций $f_k(x)$, удовлетворяющих условию леммы 2 при $a = a_k$, сходящуюся в среднем к заданной функции $f(x) \in L^2(0, \infty)$, обычным приемом перейдем от леммы 2 к следующей теореме.

Теорема 1. *Если уравнение* (1) *при $\lambda = 0$ не имеет решений с суммируемым квадратом, удовлетворяющих заданным начальным условиям, и $f(x) \in L^2(0, \infty)$, то*

$$\int\limits_0^\infty f^2(x)dx = \int\limits_0^\infty F^2(s)\,ds + \sum_l \left[\int\limits_0^\infty f(x)\,y_+(x, \lambda_l)\,dx\right]^2 + \sum_m \left[\int\limits_0^\infty f(x)\,y_-(x, \mu_m)dx\right]^2,$$

где $F(s) = \underset{a\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int\limits_0^a f(x)\,y(x, \lambda)\,dx.$

Возможность обращения в нуль функции $\Phi_+(\lambda)$ при $\lambda > 0$ обнаруживается в простейшем примере: $a = 1$, $b = c = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$. В этом случае $\Phi_+(1) = 0$.

Отправляясь от теоремы 1, можно обычными методами получить теорему разложения и обобщения ряда других теорем из теории интеграла Фурье.

Описанное выше исследование сингулярной краевой задачи может быть проведено также и при других весьма разнообразных предположениях относительно свойств функций $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$. В этой краткой статье мы ограничимся формулировкой следующей теоремы.

Теорема 2. *Если в уравнении* (1) $c(x) \to -\infty$ *при* $x \to \infty$, $a'(x) \in L(0,\infty)$, $b(x)[-c(x)]^{-1/4}$, $[-c(x)^{-5/4} c'^2(x)]$, $[-c(x)]^{-5/4} c''(x) \in L(X, \infty)$ *и* $b(x)$, $c(x) \in L(0, X)$, *то спектр сингулярной краевой задачи для дифференциального уравнения* (1) *в интервале* $(0, \infty)$ *непрерывен на всей оси* $-\infty < \lambda < \infty$, *если* $\int\limits_X^\infty [-c(x)]^{-1/4}\,dx = \infty$, *и дискретен, если* $\int\limits_X^\infty [-c(x)]^{-1/4}\,dx < \infty$ $\quad$ ($c(x) < 0$ *при* $x \geqslant X$).

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
19 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Рапопорт, ДАН, 78, № 6 (1951). [2] М. Г. Крейн, ДАН, 74, № 1 (1950). [3] E. C. Titchmarsh, Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations, Oxford, 1946. [4] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, 1950.