Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 1

МАТЕМАТИКА

Действительный член Болгарской Академии наук КИРИЛ ПОПОВ

О ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 10 V 1951)

Кроме классических методов интегрирования дифференциальных уравнений, существуют и другие, как например, метод, основанный на преобразовании Лапласа. Эти методы не имеют общности классических методов, но освещают с новой стороны трудности. В этой заметке мы рассматриваем прием, позволяющий производить интегрирование в классических случаях и открывающий новые перспективы. Для иллюстрации нашей мысли мы рассмотрим систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt}=ax+by+c,\quad \frac{dy}{dt}=kx+ly+m, \tag{1}$$

где через a, b, c, k, l, m обозначены функции от t.

Очевидно,

$$x=e^{\int\limits_0^t a\,dt}\left[x_0+\int\limits_0^t (c+by)e^{-\int\limits_0^t a\,dt}dt\right]=e^{\int\limits_0^t a\,dt}A+e^{\int\limits_0^t a\,dt}\int\limits_0^t bye^{-\int\limits_0^t a\,dt}dt,$$

$$y=e^{\int\limits_0^t l\,dt}B+e^{\int\limits_0^t l\,dt}\int\limits_0^t kxe^{-\int\limits_0^t l\,dt}dt,$$

где через x_0 и y_0 обозначены значения x и y при $t=0$, а через A и B — известные функции от t. Полагая

$$\xi=xe^{-\int\limits_0^t a\,dt},\quad \eta=ye^{-\int\limits_0^t l\,dt},$$

получим

$$\xi=A+\int\limits_0^t b\eta e^{-\int\limits_0^t (a-l)\,dt}dt,\quad \eta=B+\int\limits_0^t k\xi e^{\int\limits_0^t (a-l)\,dt}dt.$$

Исключая η из этих двух уравнений, находим

$$\xi=\alpha+\int\limits_0^t \beta\,dt\int\limits_0^t \gamma\xi\,dt=\alpha(t)+\int\limits_0^t \gamma(z)\,\xi(z)\,dz\int\limits_z^t \beta(u)\,du=$$

$$=\alpha(t)+\int\limits_0^t \gamma(z)\,[\varphi(t)-\varphi(z)]\,\xi(z)\,dz, \tag{2}$$

причем

$$\alpha = A + \int_0^t Bbe^{-\int_0^t (a-l)\,dt}\,dt, \quad \beta = be^{-\int_0^t (a-l)\,dt}, \quad \gamma = ke^{+\int_0^t (a-l)\,dt}.$$

Полученное таким образом уравнение (2) является уравнением Вольтерра, ядро которого

$$N(z, t) = \gamma(\tau)\,[\varphi(t) - \varphi(z)].$$

Подставляя вместо $\xi(z)$ под знаком интеграла его значение из (2) и итерируя эту операцию, находим

$$\xi(t) = \alpha(t) + \int_0^t N(z, t)\,\alpha(z)\,dz + \int_0^t N(z, t)\,dz \int_0^z N(u, z)\,\alpha(u)\,du + \cdots$$

$$\cdots + \underbrace{\int_0^t N(z, t)\,dz \int_0^z N(u, z)\,du \ldots dv \int_0^v N(w, v)\,\xi(w)\,dw}_{n},$$

причем остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Производя подстановку

$$\beta(t)\,dt = d\tau, \quad \tau = \int_0^t \beta(t)\,dt,$$

приходим к уравнению вида

$$\xi(\tau) = \alpha(\tau) + \int_0^\tau N(y_1, \tau)\,\xi(y_1)\,dy_1,$$

где

$$N(y_1, \tau) = \gamma(y_1)(\tau - y_1).$$

При $\gamma = \pm\beta$ многократные интегралы можно привести к простым и просуммировать полученный таким образом ряд. В самом деле, при $\gamma = +\beta$ имеем ряд вида

$$\xi(\tau) = \alpha(\tau) + \int_0^\tau d\tau \int_0^\tau \alpha\,d\tau + \int_0^\tau d\tau \int_0^\tau d\tau \int_0^\tau d\tau \int_0^\tau \alpha\,d\tau +$$

$$+ \int_0^\tau d\tau \int_0^\tau d\tau \int_0^\tau d\tau \int_0^\tau d\tau \int_0^\tau d\tau \int_0^\tau \alpha\,d\tau + \ldots,$$

откуда получаем при помощи формулы Дирихле

$$\xi(\tau) = \alpha(\tau) + \int_0^\tau \alpha(y)\left[(\tau - y) + \frac{(\tau-y)^3}{3!} + \frac{(\tau-y)^5}{5!} + \ldots\right]dy =$$

$$= \alpha(\tau) + \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha(y)\,[e^{(\tau-y)} - e^{-(\tau-y)}]\,dy.$$

Аналогичный результат получим при $\gamma = -\beta$.

Рассмотрим в качестве примера систему

$$\frac{dx}{dt} = -n(t)\,y + f_1(t), \quad \frac{dy}{dt} = n(t)\,x + \varphi_1(t).$$

Производя замену переменных

$$n(t)\,dt = d\tau, \quad \tau = \int_0^t n(t)\,dt,$$

получим

$$\frac{dx}{d\tau} = -y + f(\tau), \quad \frac{dy}{d\tau} = x + \varphi(\tau).$$

Из этой системы находим

$$x = x_0 \cos\tau - y_0 \sin\tau + \int_0^\tau f(\sigma)\cos(\tau-\sigma)\,d\sigma - \int_0^\tau \varphi(\sigma)\sin(\tau-\sigma)\,d\sigma,$$

и нам остается только восстановить переменное t подстановкой

$$\tau = \int_0^t n(t)\,dt, \quad \sigma = \int_0^s n(s)\,ds.$$

Рассмотрим в качестве другого примера уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p\frac{dx}{dt} + qx + f(t),$$

где p и q — постоянные. Обозначим через x_0 и x_0' значения x и x' при $t = 0$.

Пусть, далее,

$$\psi(t) = x_0 + (x_0' + px_0)\int_0^t dt + \int_0^t dt \int_0^t f(t)\,dt.$$

Выполняя два раза интегрирование, получим

$$x = \psi(t) + p\int_0^t x\,dt + q\int_0^t dt \int_0^t x\,dt. \tag{3}$$

Подставляя вместо x под знаком первого интеграла во второй части это выражение (3), получим

$$x = \psi(t) + p\int_0^t \psi(t)\,dt + (p^2+q)\int_0^t dt\int_0^t x\,dt + pq\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t x\,dt. \tag{4}$$

Подставляя в двойной интеграл вместо x его выражение из (3), приходим к уравнению

$$x = \psi(t) + p\int_0^t \psi(t)\,dt + (p^2+q)\int_0^t dt\int_0^t \psi(t)\,dt +$$

$$+ [p(p^2+q) + pq]\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t x\,dt + (p^2+q)q\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t x\,dt.$$

Продолжая эти вычисления, находим

$$x(t) = c_0\psi(t) + c_1\int_0^t \psi(t)\,dt + c_2\int_0^t dt\int_0^t \psi\,dt + c_3\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t \psi(t)\,dt + \ldots, \tag{5}$$

причем n-кратный интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. Здесь мы имеем

$$c_0 = 1, \quad c_1 = p, \quad c_2 = p^2 + q$$

и, вообще,

$$c_n = pc_{n-1} + qc_{n-2}.$$

2*

Таким образом находим:

$$c_0 2\sqrt{\frac{p^2}{4}+q} = \left(\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right) - \left(\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right) = r_1 - r_2,$$

$$c_1 2\sqrt{\frac{p^2}{4}+q} = r_1^2 - r_2^2, \ldots, c_n 2\sqrt{\frac{p^2}{4}+q} = r_1^{n+1} - r_2^{n+1}.$$

При этих значениях коэффициентов формула Дирихле

$$\underbrace{\int_0^t dt \int_0^t dt \ldots dt \int_0^t}_{n+1} f(t)\,dt = \frac{1}{n!}\int_0^t f(s)(t-s)^n\,ds$$

дает нам

$$x(t) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}}\left\{[x_0(r_1-p)+x_0']\,e^{r_1 t} - [x_0(r_2-p)+x_0']\,e^{r_2 t} + \right.$$

$$\left. + \int_0^t f(s)\left(e^{r_1(t-s)} - e^{r_2(t-s)}\right) ds\right\}.$$

В случае $\sqrt{\frac{p^2}{4}+q} = 0$ получаем $r_1 = r_2$. В этом случае числитель также обращается в нуль, и правило Лопиталя дает

$$x(t) = x_0 e^{r_1 t} + [x_0(r_1-p)+x_0']\,te^{r_1 t} + \int_0^t f(s)\,e^{r_1(t-s)}(t-s)\,ds.$$

Таким образом, перед нами возникает вопрос обобщения формулы Дирихле на случай

$$\underbrace{\int_0^t dt \int_0^t \gamma\,dt \int_0^t dt \int_0^t \gamma\,dt \int_0^t dt \int_0^t}_{2n+2} \gamma\,dt \ldots dt \int_0^t dt \int_0^t \gamma\alpha\,dt,$$

что можно представить в виде

$$\underbrace{\int_0^t \gamma(y)(t-y)\,dy \int_0^y \gamma(u)(y-u)\,du \int_0^u \gamma(v)(u-v)\,dv \ldots dw \int_0^w}_{n+1} \gamma(\varphi)\,\alpha(\varphi)(w-\varphi)\,d\varphi$$

и привести вопрос к изучению ядра

$$N(y,\tau) = \gamma(y)(\tau - y).$$

Болгарская Академия наук
София, Болгария

Поступило
9 II 1951