

Т. А. КОКАРЕВА

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 28 IV 1951)

§ 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^p z(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_m^{p_m}} =$$

$$= \sum_{\gamma_1=0}^{r_1} \dots \sum_{\gamma_m=0}^{r_m} A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s) \times$$

$$\times \frac{\partial^{\gamma_1 + \dots + \gamma_m} D_{y_{n+1}, \dots, y_s} z(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s)}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_m^{\gamma_m}} + f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s), \quad (1)$$

где $0 \leq n \leq s$; $p = \sum_{i=1}^m p_i$; $r_i < p_i$ ($i = 1, \dots, m$); D_{y_{n+1}, \dots, y_s} — некоторый регулярный интегро-дифференциальный оператор, зависящий только от y_{n+1}, \dots, y_s , например,

$$D_{y_{n+1}, \dots, y_s} u(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s) =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^i \sum_{(\tilde{\lambda})} B_{\lambda_1, \dots, \lambda_{s-n}}(y_{n+1}, \dots, y_s) \frac{\partial^{\tilde{\lambda}} u(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s)}{\partial y_{n+1}^{\lambda_1} \dots \partial y_s^{\lambda_{s-n}}} +$$

$$+ \sum_{\tilde{\lambda}=0}^{\tilde{\gamma}} \sum_{(\tilde{\lambda})} \int_0^{y_{n+1}} d\xi_{n+1} \int_0^{y_{n+2}} d\xi_{n+2} \dots \int_0^{y_l} K_{\lambda_1, \dots, \lambda_{s-n}}(\xi_{n+1}, \dots, \xi_l, y_{l+1}, \dots, y_s) \times$$

$$\times \frac{\partial^{\tilde{\lambda}} u(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_l, y_{l+1}, \dots, y_s)}{\partial y_{n+1}^{\tilde{\lambda}_1} \dots \partial y_s^{\tilde{\lambda}_{s-n}}} d\xi_l$$

(пределы некоторых интегралов можно считать постоянными). Мы будем называть оператор D_{y_{n+1}, \dots, y_s} регулярным, если в результате его применения к непрерывной функции получается функция, непрерывная относительно всех своих аргументов.

При выполнении начальных условий

$$\left. \frac{\partial^{k_i} z(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s)}{\partial x_i^{k_i}} \right|_{x_i=0} = \Phi_i^{k_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s) \quad (2)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; k_i = 0, 1, \dots, p_i - 1)$$

и при условиях их совместности

$$\left. \frac{\partial^{k_j} \varphi_i^{(k_i)}}{\partial x_j^{k_j}} \right|_{x_j=0} = \left. \frac{\partial^{k_i} \varphi_j^{(k_j)}}{\partial x_i^{k_i}} \right|_{x_i=0}, \quad (3)$$

где $i, j = 1, 2, \dots, m; i \neq j; k_j = 0, 1, \dots, p_j - 1; k_i = 0, 1, \dots, p_i - 1$, для уравнения (1) изучается решение следующей задачи:

1°. Какие необходимые и достаточные условия надо наложить на $A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n), f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s)$ и начальные данные (2) для того, чтобы уравнение (1) по (действительным или комплексным) переменным x_1, \dots, x_m допускало единственное аналитическое решение в окрестности $x_1 = \dots = x_m = 0$, удовлетворяющее начальным данным (2)?

2°. Если такое решение существует, то какова будет при этом его природа в области существования относительно остальных переменных y_1, y_2, \dots, y_s ?

В такой постановке задача Коши — Ковалевской в области бесконечно дифференцируемых функций впервые была изучена Г. С. Салеховым (1⁻³), а затем В. Р. Фридлендером (4). По характеру поставленной задачи область G существования решения уравнения (1) можно определить следующими условиями:

1) $|x_1| < R_1, \dots, |x_m| < R_m$, где R_1, \dots, R_m — некоторые постоянные. При этом также возможен случай, когда $R_i = \infty$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

2) Переменные y_1, \dots, y_s изменяются в некоторой замкнутой области g , примыкающей к общей области G в точке $x_1 = \dots = x_m = 0$.

Решение вышеприведенной задачи для уравнения (1) тесно связано с классом бесконечно дифференцируемых, вообще говоря, неаналитических функций, указанных Жевреем (5), и с обобщением этих классов, данным Г. С. Салеховым (3). Необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты и начальные данные для разрешимости поставленной задачи, для общих уравнений типа (1) получаются весьма сложными. Поэтому естественно в этом случае получить более простые достаточные условия.

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (1) имело единственное аналитическое решение относительно переменных x_1, \dots, x_m в окрестности точки $x_1 = \dots = x_m = 0$, удовлетворяющее начальным данным (2), достаточно, чтобы функции $A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}, f$ и $\varphi_i^{(k_i)}$ были аналитическими относительно x_1, \dots, x_m в окрестности точки $x_1 = \dots = x_m = 0$, непрерывными относительно y_1, \dots, y_n в некоторой замкнутой области $g_1 \ni (y_1, \dots, y_n)$ и чтобы относительно оператора D_{y_{n+1}, \dots, y_s} функции f и $\varphi_i^{(k_i)}$ принадлежали, соответственно, к классам α и $\beta_i^{(k_i)}$ не выше чем $p - r$ (3), где $p = \sum_{j=1}^m p_j; r = \sum_{j=1}^m r_j$.

При этом: 1) если $A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}, f$ и $\varphi_i^{(k_i)}$ — целые функции относительно x_1, \dots, x_m и $\max(\alpha, \beta_i^{(k_i)}) < p - r$, то решение z будет целой функцией относительно x_1, \dots, x_m ; 2) если $\max(\alpha, \beta_i^{(k_i)}) = p - r$, то решение z будет аналитической функцией относительно x_1, \dots, x_m в области $G \{ |x_1| < R_1, \dots, |x_m| < R_m; g \ni (y_1, \dots, y_s) \}^*$; 3) относительно переменных y_{n+1}, \dots, y_s решение будет обладать тем свойством, что в указанной области G оператор D_{y_{n+1}, \dots, y_s} можно применить к нему неограниченное число раз, и относительно этого оператора решение в некоторой замкнутой области

$$G' \{ |x_1| \leq R_1^* < R_1, \dots, |x_m| \leq R_m^* < R_m; g \ni (y_1, \dots, y_s) \} \subset G$$

* Величины $R_i^* \neq 0$ ($i = 1, \dots, m$) могут быть вычислены точно.

принадлежит к классу $\text{тах}(\alpha, \beta_i^{(k_i)}) \leq p - r$ ($i = 1, \dots, m; k_i = 0, \dots, p_i - 1$).

В теореме 1 мы предполагали, что $A_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}, f$ и $\varphi_i^{(k_i)}$ являются непрерывными функциями относительно y_1, \dots, y_n . Теорема не изменится, если считать A, f и $\varphi_i^{(k_i)}$ бесконечно дифференцируемыми функциями по этим переменным, принадлежащими, соответственно, к классам $\delta_1, \delta_2, \delta_{3i}^{(k_i)}$ в смысле Жеврея (5). В этом случае, при выполнении остальных условий теоремы 1, будет иметь место теорема 2.

Теорема 2. *Решение уравнения (1), аналитическое по x_1, \dots, x_m в окрестности точки $x_1 = \dots = x_m = 0$, будет бесконечно дифференцируемой функцией по y_1, \dots, y_n в области $G\{|x_1| < R_1, \dots, |x_m| < R_m; g \ni (y_1, \dots, y_s)\}$. Это решение в некоторой замкнутой области $G'\{|x_1| \leq R'_1 < R_1, \dots, |x_m| \leq R'_m < R_m; g \ni (y_1, \dots, y_s)\} \subset G$ при любых $\delta_1, \delta_2, \delta_{3i}^{(k_i)} \geq 0$ будет функцией класса не выше, чем $\text{тах}(\delta_1, \delta_2, \delta_{3i}^{(k_i)}) + 1$, и при любых $\delta_1, \delta_2, \delta_{3i}^{(k_i)} \geq 1$ оно будет функцией класса не выше, чем $\text{тах}(\delta_1, \delta_2, \delta_{3i}^{(k_i)})$.*

§ 2. Для уравнения

$$\frac{\partial^p z(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_m^{p_m}} =$$

$$= \sum_{\gamma_1=0}^{r_1} \dots \sum_{\gamma_m=0}^{r_m} \sum_{(\lambda)=q} A_{\gamma_1 \dots \gamma_m \lambda_1 \dots \lambda_{s-n}}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \times$$

$$\times \frac{\partial^{\gamma_1 + \dots + \gamma_m + \lambda} z(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s)}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_m^{\gamma_m} \partial y_{n+1}^{\lambda_1} \dots \partial y_s^{\lambda_{s-n}}} + f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s), \quad (4)$$

где $0 \leq n \leq s$, p и q — любые целые положительные числа, $r_i < p_i$ ($i = 1, \dots, m$), $\lambda = \sum_{j=1}^{s-n} \lambda_j$, $p = \sum_{j=1}^m p_j$, $\sum_{j=1}^m r_j = r$, имеет место теорема 3.

Теорема 3. *Для того чтобы уравнение (4) имело единственное аналитическое решение относительно переменных x_1, \dots, x_m в окрестности точки $x_1 = \dots = x_m = 0$, удовлетворяющее начальным данным (2), достаточно, чтобы функции $A_{\gamma_1 \dots \gamma_m}, f$ и $\varphi_i^{(k_i)}$ были аналитическими относительно x_1, \dots, x_m в окрестности точки $x_1 = \dots = x_m = 0$, непрерывными относительно y_1, \dots, y_n в некоторой замкнутой области $g_1 \ni (y_1, \dots, y_n)$, и чтобы по совокупности (y_{n+1}, \dots, y_s) функции f и $\varphi_i^{(k_i)}$ принадлежали, соответственно, к классам α и $\beta_i^{(k_i)}$ в смысле Жеврея не выше, чем вес уравнения $(p-r)/q$ (1).*

При этом: 1) если $A_{\gamma_1 \dots \gamma_m \lambda_1 \dots \lambda_{s-n}}, f$ и $\varphi_i^{(k_i)}$ — целые функции относительно x_1, \dots, x_m и $\text{тах}(\alpha, \beta_i^{(k_i)}) < (p-r)/q$, то решение z будет целой функцией относительно x_1, \dots, x_m ;

2) если $\text{тах}(\alpha, \beta_i^{(k_i)}) = (p-r)/q$, то решение z будет аналитической функцией относительно x_1, \dots, x_m в области

$$G\{|x_1| < R_1, \dots, |x_m| < R_m; g \ni (y_1, \dots, y_s)\};$$

3) относительно переменных y_{n+1}, \dots, y_s решение будет в области G бесконечно дифференцируемой функцией, и в некоторой замкнутой области

$$G'\{|x_1| \leq R'_1 < R_1, \dots, |x_m| \leq R'_m < R_m; g \ni (y_1, \dots, y_s)\} \subset G$$

оно будет класса не выше, чем $\max(\alpha, \beta_i^{(k_i)}) \leq (p-r)/q$ по совокупности y_{n+1}, \dots, y_s .

Пользуясь этой теоремой, можно доказать, например, что уравнение

$$\frac{\partial^p z(x, y)}{\partial x^p} \sum_{\gamma=0}^r A_\gamma(x) \frac{\partial^{\gamma+q} z(x, y)}{\partial x^\gamma \partial y^q} \quad (r < p)$$

с весом $\delta = (p-r)/q > 1$ при выполнении условий теоремы 3 всегда допускает существование неаналитического решения по переменному y . Для уравнения типа

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^p z(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_m^{p_m}} = \\ & = \sum_{\gamma_1=0}^{r_1} \dots \sum_{\gamma_m=0}^{r_m} \sum_{(\lambda)=q} A_{\gamma_1 \dots \gamma_m \lambda_1 \dots \lambda_s}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s) \times \\ & \times \frac{\partial^{\gamma_1 + \dots + \gamma_m + \lambda} z(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s)}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_m^{\gamma_m} \partial y_1^{\lambda_1} \dots \partial y_s^{\lambda_s}} + f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s) \end{aligned} \quad (5)$$

доказывается, что условия существования аналитического решения по x_1, \dots, x_m и его природа относительно остальных переменных y_1, \dots, y_s существенным образом зависят также от величины веса уравнения, равной $\delta = (p-r)/q$.

§ 3. Надо отметить, что для некоторых частных случаев вышеприведенных уравнений достаточные условия существования аналитического интеграла совпадают с необходимыми. Например, для того, чтобы уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^p z(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_m^{p_m}} = \\ & = \varepsilon \frac{x_1^{l_1}}{l_1!} \dots \frac{x_m^{l_m}}{l_m!} \int_0^{x_1} d\xi_1 \dots \int_0^{x_m} D_{y_1, \dots, y_s} z(\xi_1, \dots, \xi_m, y_1, \dots, y_s) d\xi_m, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \text{const}$, имело единственное аналитическое решение относительно x_1, \dots, x_m в окрестности точки $x_1 = \dots = x_m = 0$, удовлетворяющее начальным данным (2), необходимо и достаточно, чтобы начальные данные $\varphi_i^{(k_i)}$ были аналитическими функциями по $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ и относительно оператора D_{y_1, \dots, y_s} принадлежали к классу не выше, чем $p + m$.

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии наук СССР

Поступило
28 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. С. Салехов, Усп. матем. наук, 2, 2 (18), 226 (1947). ² Г. С. Салехов, ДАН, 59, № 5, 857 (1948). ³ Г. С. Салехов, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 355 (1950). ⁴ В. Р. Фридлиндер, ДАН, 76, № 3 (1951). ⁵ M. Jevrey, Ann. Ёс. Norm., 35, sér. 3, 129 (1918).