Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXIX, № 1

МАТЕМАТИКА

ЛЮБОМИР ИЛИЕВ

О ТРИЖДЫ СИММЕТРИЧНЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 V 1951)

Обозначим через S_3 класс функций вида

$$f_3(z) = z + a_1^{(3)} z^4 + a_2^{(3)} z^7 + \ldots \tag{1}$$

трижды симметричных, однолистных и регулярных в $|z| < 1$.

Используя метод В. Левина [1], установим следующую теорему:

Теорема 1. *Если $f_3(z) \in S_3$, то*

$$|a_2^{(3)}| < 0{,}650, \quad |a_3^{(3)}| < 0{,}652, \quad |a_4^{(3)}| < 0{,}666, \quad |a_5^{(3)}| < 0{,}687,$$
$$|a_6^{(3)}| < 0{,}712, \quad |a_7^{(3)}| < 0{,}764, \quad |a_8^{(3)}| < 0{,}822 \tag{I}$$

и, вообще,

$$|a_n^{(3)}|^2 \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|a_{n-\nu}^{(3)}|^2}{3\nu - 1}. \tag{I'}$$

С помощью неравенства (I) мы установим:

Теорема 2. *Если $f_3(z) \in S_3$, то конечная сумма*

$$\sigma_n^{(3)}(z) = z + a_1^{(3)} z^4 + \ldots + a_n^{(3)} z^{3n+1} \tag{2}$$

при $n = 1$ и $n > 3$ однолистна в круге $|z| < \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$; константа $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ не может быть заменена большей.

Доказательство теоремы 1. Если $f_3(z) \in S_3$, то функция

$$\frac{1}{f_3(1/z)} = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu z^{-3\nu+1} \tag{3}$$

регулярна и однолистна в $|z| > 1$, за исключением полюса $z = \infty$. Согласно теореме о площадях, будем иметь

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (3\nu - 1) |b_\nu|^2 \leqslant 1. \tag{4}$$

Из (1) и (3) находим:

$$(z^{-1} + a_1^{(3)} z^{-4} + a_2^{(3)} z^{-7} + \ldots)(z + b_1 z^{-2} + b_2 z^{-5} + \ldots) = 1,$$

откуда при $a_0^{(3)} = 1$

$$a_n^{(3)} = -\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu a_{n-\nu}^{(3)}. \tag{5}$$

Из последнего неравенства следует

$$|a_n^{(3)}|^2 \leqslant \left\{\sum_{\nu=1}^{n} |b_\nu|\,|a_{n-\nu}^{(3)}|\right\}^2 \leqslant \left\{\sum_{\nu=1}^{n} (3\nu-1)\,|b_\nu|^2\right\}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{|a_{n-\nu}^{(3)}|^2}{3\nu-1}\right\}, \tag{6}$$

или, принимая во внимание (4), получаем неравенство (I'). Исходя из $|a_1^{(3)}| \leqslant {}^2/_3$ и (I'), находим (I).

Доказательство теоремы 2. 1) При $n=1$ теорема справедлива. Действительно, если допустить, что при $|z_1| < \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$, $|z_2| < \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ имеем равенство ($z_1 \neq z_2$)

$$z_1 + a_1^{(3)} z_1^4 = z_2 + a_1^{(3)} z_2^4, \tag{7}$$

то, ввиду того, что $|a_1^{(3)}| \leqslant {}^2/_3$, получаем абсурдное неравенство

$$1 = |a_1^{(3)}| \left|\frac{z_1^4 - z_2^4}{z_1 - z_2}\right| < 4\,|a_1^{(3)}|\,\frac{3}{8} \leqslant 4\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8} = 1. \tag{8}$$

Константа $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ достигается конечной суммой $z + {}^2/_3 z^4$ однолистной функции

$$\frac{z}{(1-z^3)^{2/3}}. \tag{9}$$

2) В нашей работе ([2]) мы установили, что если $f_3(z) \in S_3$ и $0 < |z| \leqslant r < 1$, $|z_1| \leqslant r$, $|z_2| \leqslant r$, $z_1 \neq z_2$, то

$$\left|\frac{f_3(z_1) - f_3(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \geqslant \frac{1-r^2}{(1+r^3)^{4/3}}. \tag{10}$$

При $r^3 = {}^3/_8$, $|z_1| < \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$, $|z_2| < \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$, $z_1 \neq z_2$ из (10) находим

$$\left|\frac{f_3(z_1) - f_3(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \geqslant \frac{4\left(4 - \sqrt[3]{9}\right)}{11\sqrt[3]{11}}. \tag{11}$$

Следовательно, согласно методу Сеге ([3]), конечная сумма (2) функции (1) однолистна в круге $|z| < \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$, если

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^{(3)} \frac{z_1^{3\nu+1} - z_2^{3\nu+1}}{z_1 - z_2}\right| < \frac{4\left(4 - \sqrt[3]{9}\right)}{11\sqrt[3]{11}}. \tag{12}$$

Последнее неравенство выполнено, если

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu^{(3)}|\,(3\nu+1)\,r^{3\nu} < \frac{4\left(4 - \sqrt[3]{9}\right)}{11\sqrt[3]{11}}, \tag{13}$$

где $r^3 = {}^3/_8$.

К. Джо ([4]) установил при $n \geqslant 2$ неравенство

$$(3n+1)^{1/3}\,|a_n^{(3)}| < 7{,}96. \tag{14}$$

Принимая во внимание (I) и (14), устанавливаем, что неравенство (13) выполнено при $n \geqslant 4$, если

$$0{,}687 \cdot 16 \cdot r^{15} + 0{,}712 \cdot 19 \cdot r^{18} + 0{,}764 \cdot 22 \cdot r^{21} +$$
$$+ 0{,}822 \cdot 25 \cdot r^{24} + \frac{7{,}96}{\sqrt[3]{28}} \sum_{\nu=9}^{\infty} (3\nu + 1) r^{3\nu} < \frac{4\left(4 - \sqrt[3]{9}\right)}{11 \sqrt[3]{11}}, \tag{15}$$

где $r^3 = {}^3/_8$.

Из тождества

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} r^{3\nu+1} = \frac{r^{3k+1}}{1 - r^3} \tag{16}$$

при $r < 1$ следует

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} (3\nu + 1) r^{3\nu} = r^{3k} \frac{(3k+1)(1 - r^3) + 3r^3}{(1 - r^3)^2}. \tag{17}$$

Таким образом, (15) принимает вид

$$0{,}687 \cdot 16 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^5 + 0{,}712 \cdot 19 \left(\frac{3}{8}\right)^6 + 0{,}764 \cdot 22 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^7 +$$
$$+ 0{,}822 \cdot 25 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^8 + \frac{7{,}96 \cdot 8}{\sqrt[3]{28}} \, \frac{149}{25} \left(\frac{3}{8}\right)^9 < 0{,}312. \tag{18}$$

Так как неравенство (18) верно, то теорема установлена.

Математический институт при
Софийском университете
София, Болгария

Поступило
15 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Levin, Proc. London Math. Soc., **39**, 467 (1935). [2] Л. Илиев, ДАН, **69**, № 4 (1949). [3] G. Szegö, Math. Ann., **100**, 188 (1928). [4] K. Joh, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **19**, 1 (1937).