Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. БОРГАРДТ

АНТИКОММУТАТИВНЫЕ МАТРИЦЫ В ТЕОРИИ МЕЗОНА

(Представлено академиком В. А. Фоком 25 IV 1951)

Волновые уравнения первого порядка для мезонного поля могут быть записаны в виде [1]

$$\beta_\lambda \frac{\partial \psi}{\partial x_\lambda} + k_0 \psi = 0 \quad (k_0 = E_0 / \hbar c), \tag{1}$$

где ψ — одноколонная матрица, содержащая компоненты тензорных величин, характеризующих поле. Матрицы β_l удовлетворяют правилам коммутации

$$\beta_i \beta_k \beta_l + \beta_l \beta_k \beta_i - \beta_i \delta_{kl} - \beta_l \delta_{ki} = 0. \tag{2}$$

В четырехмерном пространстве имеется три неэквивалентных неприводимых представления этой алгебры: десятирядное, пятирядное и однорядное; первое применяется для описания векторного (В) или псевдовекторного (ПВ) поля, второе — для описания скалярного (С) или псевдоскалярного (ПС) поля, последнее представление $\beta_i = (0)$ является тривиальным.

Применение приводимого, шестнадцатирядного представления β-алгебры (десятирядное + пятирядное + однорядное) дает волновые уравнения для смеси мезонных полей (В + ПС- или ПВ + С-смесь). Оказывается возможным расширить эту схему, включая в общее волновое уравнение описание всех четырех типов мезонных полей.

Используем обычную форму приводимого представления [2] и обозначим матрицы $\beta_l^{(1)}$ так, чтобы волновое уравнение соответствовало В + ПС-смеси

$$\beta_\lambda^{(1)} \frac{\partial \Psi}{\partial x_\lambda} + k_0 \Psi = \Phi, \tag{3}$$

где Ψ — шестнадцатикомпонентная волновая функция, состоящая из скаляра и компонент четырехмерного вектора и совершенно антисимметричных тензоров второго, третьего и четвертого ранга; Φ — функция, характеризующая источники поля.

Из этого уравнения может быть получено волновое уравнение для ПВ + С-смеси путем преобразования функций Ψ и Φ посредством шестнадцатирядной эрмитовской матрицы Γ_0, связанной с преобразованиями типа зеркальных отражений. Искомое уравнение будет

$$-\beta_\lambda^{(1)} \frac{\partial \Psi'}{\partial x_\lambda} + k_0 \Psi' = \Phi', \tag{4a}$$

где

$$\Psi' = i\Gamma_0\Psi, \quad \Phi' = i\Gamma_0\Phi \quad (\Psi' = i\Psi'\Gamma_0, \quad \Phi = i\Phi'\Gamma_0). \tag{5}$$

Из этих соотношений следует, что (4а) эквивалентно

$$\beta_\lambda^{(11)} \frac{\partial \Psi}{\partial x_\lambda} + k_0\Psi = \Phi, \tag{4б}$$

где

$$\beta_i^{(11)} = -\Gamma_0\beta_i^{(1)}\Gamma_0. \tag{6}$$

Таким образом, уравнение вида

$$\Gamma_\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial x_\lambda} + k_0\Psi = \Phi, \tag{7}$$

где

$$\Gamma_i = \beta_i^{(1)} + \beta_i^{(11)}, \tag{8}$$

описывает смесь общего типа, содержащую все мезонные поля. Шестнадцатирядные эрмитовские матрицы Γ_i удовлетворяют простой антикоммутативной алгебре. Действительно, матрица преобразований (5), (6) Γ_0 обладает свойствами

$$\Gamma_0^2 = I, \quad \beta_i\Gamma_0\beta_k + \beta_k\Gamma_0\beta_i = 0, \quad \Gamma_0\beta_i\beta_k\Gamma_0 + \beta_k\beta_i - \delta_{ik}\cdot I = 0. \tag{9}$$

Пользуясь этими соотношениями, легко показать, что Γ_i антикоммутируют:

$$\tfrac{1}{2}\{\Gamma_i\Gamma_k\} - \delta_{ik}\cdot I = 0. \tag{10}$$

Так как, кроме этого, $\{\Gamma_i\Gamma_0\} = 0$, оказывается, что

$$\Gamma_0 = \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4. \tag{11}$$

В группе Γ-матриц имеется 16 матричных операторов, которые в комбинации с Ψ^+ и Ψ дают тензорные плотности основных физических величин поля. Плотность энергии, в общем случае, не является положительно определенной, хотя поле и обладает целым спином. Дальнейшее развитие теории формально аналогично теории электрона. Использование этого параллелизма может облегчить решение ряда задач теории мезонных полей. Возможно также путем аналогии выяснить физическое содержание некоторых неясных соотношений теории электрона.

Днепропетровский государственный университет

Поступило
22 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc., A, **173**, 91 (1939). [2] В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ч. II, § 4, М., 1947.