

В. Г. ЛЕВИЧ

**ТЕОРИЯ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВИЖУЩЕЙСЯ
ЖИДКОСТИ (ГИДРОДИНАМИКА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ
ПРАНДТЛЯ)**

(Представлено академиком А. Н. Фрумкинм 4 V 1951)

Как известно, диффузионные процессы в движущейся жидкости (конвективная диффузия) существенно отличаются по своему характеру от процесса конвективной теплопроводности. Различие это связано с различием в значениях коэффициентов диффузии и температуропроводности в жидкостях.

Именно, коэффициенты диффузии растворенных молекул и ионов (в воде) составляют обычно $D \sim 10^{-5}$ см²/сек; коэффициент температуропроводности воды равен при комнатной температуре $\kappa \sim 1,4 \cdot 10^{-3}$ см²/сек, т. е. примерно в 100 раз больше коэффициента диффузии обычных веществ.

Перенос произвольной субстанции (тепла или вещества) в движущейся жидкости характеризуется обычно значением безразмерного коэффициента переноса (числа Нуссельта). Для случая диффузии

$$Nu_D = \frac{j_{diff} l}{D \Delta c},$$

где j_{diff} — диффузионный поток вещества, приходящийся на 1 см² в 1 сек., l — характерный размер и Δc — разность концентраций вблизи поверхности тела и в глубине жидкости.

В случае теплопроводности Nu_κ имеет аналогичный вид, с заменой D на κ и Δc на ΔT . Коэффициент переноса Nu является функцией безразмерных критериев Рейнольдса Re , характеризующего режим движения жидкости, и Прандтля Pr , характеризующего перенос субстанции в движущейся жидкости. Последний представляет отношение кинематической вязкости жидкости ν к коэффициенту диффузии D ($Pr_D = \nu/D$) или температуропроводности ($Pr_\kappa = \nu/\kappa$).

Таким образом,

$$Nu = f(Re, Pr).$$

Различие в численных значениях коэффициентов диффузии и температуропроводности приводит к тому, что критерии Прандтля в случае диффузии ($Pr_D \gg 10^3$) и температуропроводности ($Pr_\kappa \sim 1 - 10$) имеют совершенно различные значения. В этом состоит отличие процессов переноса в жидкостях и газах. В последних оба критерия Прандтля — для диффузии и температуропроводности —

имеют значения порядка единицы. Из сказанного вытекает, что процесс конвективной диффузии в жидкостях можно характеризовать как процесс, идущий при больших числах Прандтля $Pr \gg 1$.

Вопросы конвективной диффузии имеют существенное значение в ряде физико-химических и технологических процессов. Так, конвективная диффузия ионов в растворах электролитов определяет значение плотности тока, могущего протекать через электролит на электрод (1). Скорость гетерогенных химических процессов, идущих на поверхности раздела жидкость — твердое тело, жидкость — газ и жидкость — жидкость, например, процессов адсорбции, химических превращений на поверхности, идущих в присутствии катализатора, и т. п., в большинстве случаев определяется быстротой транспорта вещества (или одного из веществ, фигурирующих в процессе реакции) к месту реакции, т. е. процессом конвективной диффузии. Наконец, скорость растворения большинства твердых тел и многих газов в жидкостях определяется скоростью отвода растворенного вещества от границы раздела, на которой происходит процесс растворения.

В ряде работ (1-4) нами развивалась количественная теория процессов конвективной диффузии в жидкостях в связи с указанными выше физико-химическими вопросами.

В настоящей заметке мы хотим подчеркнуть принципиальную сторону вопроса и обратить внимание на неприменимость аналогии между диффузией и теплопроводностью, широко применяющейся в газах, в случае жидкостей.

В теории теплопередачи в движущихся жидкостях показывается, что при $Re \gg 1$ процесс теплопередачи лимитируется отводом тепла через тонкий пограничный слой, образующийся в жидкости вблизи поверхности обтекаемого твердого тела. В этом слое, именуемом обычно тепловым слоем, происходит основной перепад температуры ΔT .

Во всех расчетах теории теплопередачи существенным образом используется то обстоятельство, что для этого процесса можно считать $Pr \sim 1$. Это позволяет отождествлять тепловой слой с гидродинамическим пограничным слоем.

Иначе обстоит дело в предельном случае $Pr \gg 1$. В этом случае вблизи поверхности раздела также образуется пограничный диффузионный слой, в котором происходит основное изменение концентрации Δc . Однако толщина его оказывается значительно меньше, чем толщина гидродинамического пограничного слоя.

Как известно, значение толщины пограничного слоя определяется по порядку величины условием равенства молекулярного и конвективного потоков субстанции. В случае гидродинамического пограничного слоя переносимой субстанцией является количество движения. Поэтому толщина гидродинамического пограничного слоя δ определяется условием

$$\eta \frac{v_x}{\delta} \sim \rho v_x v_y \sim \rho v_x^2 \frac{\delta}{l}, \quad (1)$$

которое приводит к известному выражению

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu l}{v_x}}, \quad (2)$$

где v_x — характерная скорость потока и l — характерный размер.

Для диффузионного пограничного слоя можно аналогично написать условие равенства молекулярного и конвективного потоков вещества

$$D \frac{\Delta c}{\delta'} \sim v_y \Delta c. \quad (3)$$

Поскольку, однако, $D \ll \eta / \rho = \nu$, равенство (3) имеет место при удалениях от стенки δ' гораздо меньших, чем δ , т. е. внутри гидродинамического пограничного слоя. Здесь $v_y \sim \nu y^2 / \delta^3$. Поэтому

$$\delta' \sim \frac{D}{v_y} \sim \frac{D\delta^3}{\nu\delta'^2}$$

и

$$\delta' \sim \left(\frac{D}{\nu}\right)^{1/3} \delta \sim \frac{1}{10} \delta.$$

Таким образом, толщина диффузионного пограничного слоя δ' составляет лишь около 0,1 толщины гидродинамического пограничного слоя δ . Последнее обстоятельство коренным образом отличает диффузионный пограничный слой от теплового, толщина которого почти точно равна δ .

Преыдущие рассуждения относились к случаю ламинарного режима течения жидкости. Если течение в гидродинамическом пограничном слое или в трубе, в случае внутренней задачи, становится турбулентным, возникает необходимость в дополнительном рассмотрении.

В случае турбулентного течения имеет место известная аналогия Рейнольдса, установившего подобие между явлениями переноса количества движения и тепла ((⁵), стр. 329 и (⁶, ⁷)). Часто используемая простейшая схема деления турбулентного потока на турбулентную область и ламинарный подслой, в котором турбулентность полностью исчезает, вызывает возражения как с принципиальной стороны — для внезапного исчезновения турбулентных пульсаций внутри жидкости нет никаких оснований, так и с точки зрения экспериментальных данных, касающихся существования турбулентных пульсаций давления на поверхности твердого тела, исследований профиля скоростей и данных по теплопередаче. Это обстоятельство побуждало многих авторов высказывать сомнение по поводу существования турбулентности вплоть до самой стенки (⁸, ⁹). Однако, каков бы ни был закон спадания турбулентности при приближении к стенке, всегда можно ввести подслой жидкости, в котором перенос количества движения молекулярным (вязким) механизмом превышает перенос его турбулентными пульсациями. Именно этот подслой толщиной δ_0 мы именуем вязким подслоем. Из самого характера его определения ясно, что в вязком подслое существуют, хотя бы и ослабленные, турбулентные пульсации. Закон спадания турбулентности с расстоянием до стенки y в вязком слое имеет вид: $\lambda \sim \text{const} \cdot y^2 / \delta_0$, где λ — масштаб турбулентных пульсаций (¹, ¹⁰).

Эти турбулентные пульсации, переносящие малую долю общего потока количества движения, оказываются еще достаточно мощными для переноса основной доли вещества, поскольку $D \ll \nu$. Таким образом, весь турбулентный поток разбивается на три области:

| Область | Основной механизм переноса количества движения | Основной механизм переноса вещества |
|--------------------------|--|-------------------------------------|
| $y < \delta'$ | Вязкость | Молекулярная диффузия |
| $\delta' < y < \delta_0$ | Вязкость | Турбулентные пульсации |
| $\delta_0 < y$ | Турбулентные пульсации | Турбулентные пульсации |

Особого рассмотрения требует также случай конвективного переноса вещества к границе раздела жидкость — жидкость. На этой границе касательная слагающая тензора напряжений остается непрерывной, но скорость не обращается в нуль. Благодаря этому подобие между переносом количества движения и переносом вещества полностью нарушается.

Нами для ряда случаев были вычислены значения Nu (для $Pr \gg 1$) (см. табл. 1).

Таблица 1

| Число Рейнольдса | Режим течения | Геометрические условия | Коэффициент переноса |
|--------------------------------|----------------------------|---|---|
| $\frac{uR}{\nu} \ll 1$ | Вязкое течение | Поверхность сферической капли | $2,04 Pr^{1/2} Re^{1/2}$ |
| $\frac{uL}{\nu} \gg 1$ | Ламинарный пограничн. слой | Пластика, обтекаемая потоком (длина L) | $0,67 Pr^{1/2} Re^{1/2}$ |
| $\frac{\omega R^2}{\nu} \gg 1$ | То же | Вращающийся диск | $0,617 Pr^{1/2} Re^{1/2}$ |
| $Gr \gg 1$ | » | Естественная конвекция | $0,73 Pr^{1/4} Gr^{1/2}$ |
| — | — | Гладкая поверхность стекающей пленки | $0,63 Pr^{1/2} Re^{1/2}$ |
| $\frac{uL}{\nu} \gg 1$ | Турбулентное течение | Поверхность пластинки | $\sim Pr^{1/4} \frac{Re}{\ln Re}$ (логарифмическая точность) |
| $\frac{uL}{\nu} \gg 1$ | То же | Поверхность стекающей жидкой пленки | $\sim Pr^{1/2} Re^{3/4}$ |

Вычисленные Nu для вращающегося диска подверглись экспериментальной проверке в работе Б. Н. Кабанова и Ю. Г. Сивера⁽¹¹⁾. Согласие с опытом оказалось превосходным. Формулы для Nu в случае турбулентного обтекания пластинки также находятся в согласии с опытом.

Поступило
6 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Г. Левич, ЖФХ, 18, 335 (1944). ² В. Г. Левич, ЖФХ, 22, 575 (1948).
³ В. Г. Левич, ЖФХ, 22, 711 (1948). ⁴ В. Г. Левич, ЖФХ, 22, 721 (1948). ⁵ Современная гидро- и аэродинамика, под ред. Гольдштейна, 2, 1948. ⁶ O. Reynolds, Papers on Mechanical and Physical Subjects, 1, 1900. ⁷ T. von Karman, Proc. 4-th Internat. Congr. f. Appl. Mech., 1934, p. 77. ⁸ И. Л. Капица, ДАН, 55, 594 (1947).
⁹ Д. А. Франк-Каменецкий, Диффузия и теплопередача в химической кинетике, М., 1947. ¹⁰ Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1944.
¹¹ Б. Н. Кабанов и Ю. Г. Сивер, ЖФХ, 22, 53 (1948).