Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

Г. П. САФРОНОВА

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ СУММИРОВАНИЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 IV 1951)

В статье ([1]) мы рассмотрели некоторый метод суммирования рядов, названный нами методом (J). Здесь мы переносим этот метод в теорию суммирования несобственных интегралов и, в частности, применяем его к интегралу Фурье.

Пусть при любом конечном A будет $F(u) \in L([0, A])$. Положим

$$\varphi(u, \lambda) = \begin{cases} \frac{2}{\lambda^3}(\lambda - u)^3 - \frac{1}{\lambda^3}(\lambda - 2u)^3, & 0 \leqslant u \leqslant \frac{\lambda}{2}, \\ \frac{2}{\lambda^3}(\lambda - u)^3, & \frac{\lambda}{2} \leqslant u \leqslant \lambda, \end{cases}$$

$$J(\lambda) = \int_0^\lambda \varphi(u, \lambda) F(u)\, du, \tag{1}$$

и будем говорить, что интеграл

$$\int_0^\infty F(u)\, du \tag{2}$$

суммируется методом (J) к значению I, если

$$\lim_{\lambda \to \infty} J(\lambda) = I.$$

Если, в частности, принять за интеграл (2) интеграл Фурье

$$\int_0^\infty du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t - x)\, dt,$$

где $f(t) \in L(-\infty, +\infty)$, то интеграл (1) примет вид

$$J_\lambda(x) = \frac{96}{\pi\lambda^3} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin^4 \lambda \frac{t-x}{4}}{(t-x)^4}\, dt.$$

Теорема 1. *Метод (J) равносилен* методу $(C, 3)$.*

* Интересно отметить, что в теории рядов метод (J) не слабее $(C, 3)$, но не равносилен ему.

Положим

$$C(\lambda)=\int\limits_0^\lambda\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^3 F(u)\,du.$$

Тогда

$$J(\lambda)=2C(\lambda)-C\left(\frac{\lambda}{2}\right). \tag{3}$$

Если интеграл (2) суммируется методом $(C, 3)$ к значению I, то очевидно, что и

$$\lim_{\lambda\to\infty} J(\lambda)=I,$$

и, стало быть, метод (J) не слабее метода $(C, 3)$.

Для доказательства обратного утверждения заметим, что из (3) вытекает

$$C(\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}J\left(\frac{\lambda}{2^{i-1}}\right). \tag{4}$$

Пусть теперь существует

$$\lim_{\lambda\to\infty} J(\lambda)=I.$$

Нетрудно убедиться, что $J(\lambda)$ ограниченная функция. Поэтому ряд (4) сходится равномерно относительно λ. Переходя в нем к пределу при $\lambda\to\infty$, получим

$$\lim_{\lambda\to\infty} C(\lambda)=I.$$

Отсюда, между прочим, вытекает, что интеграл Фурье функции $f(t)$ суммируется методом (J) к значению $f(x)$ во всякой точке x, в которой $f(t)$ служит производной своего неопределенного интеграла. Этот результат, однако, содержится и в следующей теореме, в которой уже не предполагается, что $f(t)\in L(-\infty, +\infty)$.

Теорема 2. *Пусть*

$$\frac{f(t)}{1+t^4}\in L(-\infty, +\infty).$$

Тогда во всякой точке x, в которой $f(t)$ служит производной своего неопределенного интеграла, будет

$$\lim_{\lambda\to\infty} J_\lambda(x)=f(x).$$

Легко убедиться, что имеет место равенство

$$J_\lambda(x)-f(x)=\frac{96}{\pi\lambda^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f(t)-f(x)]\frac{\sin^4\lambda\frac{t-x}{4}}{(t-x)^4}\,dt.$$

Ограничимся рассмотрением интеграла от x до $+\infty$, ибо интеграл по промежутку $(-\infty, x)$ аналогичен. Тогда дело сведется к доказательству стремления к нулю интеграла

$$I(\lambda)=\frac{96}{\pi\lambda^3}\int\limits_0^{\infty}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin^4(\lambda t/4)}{t^4}\,dt.$$

Положим

$$\psi(h)=\int_0^h [f(x+t)-f(x)]\,dt.$$

Возьмем $\varepsilon>0$ и найдем такое $\delta>0$, чтобы при $0<h\leqslant\delta$ было

$$|\psi(h)|\leqslant\varepsilon h. \tag{5}$$

Возьмем столь большое λ, чтобы оказалось

$$\frac{2\pi}{\lambda}<\delta, \tag{6}$$

и разобьем $I(\lambda)$ на три интеграла по схеме

$$I(\lambda)=\int_0^\infty=\int_0^{2\pi/\lambda}+\int_{2\pi/\lambda}^{\delta}+\int_\delta^\infty=I_1+I_2+I_3.$$

Для оценки интеграла I_1 заметим, что функция $\frac{\sin^4(\lambda t/4)}{t^4}$ неотрицательна и убывает в промежутке $[0, 2\pi/\lambda]$. Тогда, в силу условий (5), (6), окажется

$$|I_1|\leqslant\frac{96}{\pi\lambda^3}\varepsilon\int_0^{2\pi/\lambda}\frac{\sin^4(\lambda t/4)}{t^4}\,dt<\varepsilon.$$

Оценим I_2. Интегрирование по частям дает

$$I_2=\frac{96}{\pi\lambda^3}\left[\psi(t)\frac{\sin^4(\lambda t/4)}{t^4}\right]_{2\pi/\lambda}^{\delta}-\frac{96}{\pi\lambda^3}\int_{2\pi/\lambda}^{\delta}\psi(t)\left(\frac{\sin^4(\lambda t/4)}{t^4}\right)'dt.$$

Но

$$\frac{96}{\pi\lambda^3}\left|\left[\psi(t)\frac{\sin^4(\lambda t/4)}{t^4}\right]_{2\pi/\lambda}^{\delta}\right|\leqslant\frac{96}{\pi\lambda^3}\left(\frac{\varepsilon}{\delta^3}+\frac{\lambda^3}{8\pi^3}\varepsilon\right)<\varepsilon.$$

Произведя замену переменной в интеграле

$$I_2'=\frac{96}{\pi\lambda^3}\int_{2\pi/\lambda}^{\delta}\psi(t)\left(\frac{\sin^4(\lambda t/4)}{t^4}\right)'dt$$

и используя неравенства

$$\left|\psi\left(\frac{4u}{\lambda}\right)\right|\leqslant\varepsilon\frac{4u}{\lambda};\qquad\left|\left(\frac{\sin^4 u}{u^4}\right)'\right|\leqslant\frac{4(u+1)}{u^5},$$

получим

$$|I_2'|\leqslant\frac{6\varepsilon}{\pi}\int_{\pi/2}^{\lambda\delta/4}\frac{u+1}{u^4}\,du\leqslant N\varepsilon\quad\left(N=\frac{6}{\pi}\int_{\pi/2}^{\infty}\frac{u+1}{u^4}\,du\right).$$

Таким образом,

$$|I_2|\leqslant(N+1)\varepsilon.$$

Интеграл I_3 оценивается следующим образом:

$$|I_3|\leqslant\frac{96}{\pi\lambda^3}\left[\int_\delta^\infty\frac{|f(x+t)|\,dt}{t^4}+|f(x)|\int_\delta^\infty\frac{dt}{t^4}\right]<\varepsilon$$

при $\lambda>\lambda_0$

Окончательно, если $\lambda > \lambda_0$ и удовлетворяет условию (6), то

$$|J_\lambda(x) - f(x)| \leqslant 2(N+3)\,\varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

В заключение я приношу глубокую благодарность руководителю моей работы проф. И. П. Натансону.

Поступило
14 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. П. Сафронова, ДАН, 73, № 2, 277 (1950). [2] И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, 1950, стр. 243.