Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

И. М. РАПОПОРТ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 20 IV 1951)

Исследованию асимптотического поведения решений линейных дифференциальных уравнений посвящена обширная литература. Мы указываем в этой статье новый метод исследования, простой и в то же время достаточно универсальный.

1. Рассмотрим предварительно систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_j}{dt} = w_j(t)\,y_j + \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(t)\,y_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad t_0 \leqslant t < \infty, \tag{1}$$

коэффициенты которой удовлетворяют следующим условиям:

а) существует такое достаточно большое T_0, что при $t \geqslant T_0$ ни одна из разностей $u_j(t) - u_k(t)$ не меняет знака ($u_j = \operatorname{Re} w_j$);

б) $c_{ij}(t) \in L\,(t_0, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

в) $w_j(t) \in L\,(t_0, t_1)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, при любом конечном t_1.

Подстановка $y_j = \exp \int\limits_{t_0}^{t} w_k(t)\,dt\,\eta_{jk}$ приводит уравнения (1) к виду

$$\frac{d\eta_{jk}}{dt} = [w_j(t) - w_k(t)]\,\eta_{jk} + \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(t)\,\eta_{ik}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Введем обозначение $\gamma_{jk}(t) = \int\limits_{T_0}^{t} [u_j(t) - u_k(t)]\,dt$ и рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\eta_{kk}(t) = 1 - \int_t^\infty \sum_{i=1}^{n} c_{ik}(\tau)\,\eta_{ik}(\tau)\,d\tau,$$

$$\eta_{jk}(t) = -\int_t^\infty \exp \int_t^\tau [w_k(\tau) - w_j(\tau)]\,d\tau \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(\tau)\,\eta_{ik}(\tau)\,d\tau$$

$$\text{при } \gamma_{jk}(\infty) > -\infty,$$

$$\eta_{jk}(t) = C_{jk} \exp \int_T^t [w_j(\tau) - w_k(\tau)]\,d\tau +$$

$$+ \int_T^t \exp \int_\tau^t [w_j(\tau) - w_k(\tau)]\,d\tau \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(\tau)\,\eta_{ik}(\tau)\,d\tau$$

$$\text{при } \gamma_{jk}(\infty) = -\infty, \quad T \leqslant t < \infty, \quad T \geqslant T_0. \tag{3}$$

где C_{jk} — произвольные постоянные. Будем решать уравнения (3) методом последовательных приближений, определяя каждое последующее приближение как результат подстановки предыдущего приближения в правые части уравнений (3) (в начале процесса можно положить $\eta_{jk}(t) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$). Указанный процесс будет сходиться при

$$\max_{i,j} \int_{T}^{\infty} |c_{ij}(t)|\, dt < \frac{1}{n} e^{-\gamma}, \tag{4}$$

где γ — наибольшее из абсолютных значений всех сходящихся интегралов $\int_{T_0}^{\infty} [u_j(t) - u_k(t)]\, dt$. Так как функции $c_{ij}(t)$ суммируемы в интервале (T_0, ∞), всегда можно отыскать такое достаточно большое значение T, при котором условие (4) будет выполняться. Итак, система интегральных уравнений (1) имеет решение, непрерывное в бесконечном интервале (T, ∞). Исследуем асимптотическое поведение этого решения. Из последней группы уравнений (3) найдем:

$$\eta_{jk}(t) = \eta_{jk}(t') \exp \int_{t'}^{t} [w_j(\tau) - w_k(\tau)]\, d\tau + \\ + \int_{t'}^{t} \exp \int_{\tau}^{t} [w_j(\tau) - w_k(\tau)]\, d\tau \sum_{l=1}^{n} c_{lj}(\tau)\, \eta_{lk}(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Соотношение (5) показывает, что в рассматриваемом случае $\eta_{jk}(t) \to 0$, когда $t \to \infty$, так как в этом случае $\gamma_{jk}(\infty) = -\infty$. Из остальных уравнений (3) очевидно, что и в прочих случаях $\eta_{jk}(\infty) = 0$ при $j \neq k$, а $\eta_{kk}(\infty) = 1$. Рассмотренное нами решение интегральных уравнений (3) удовлетворяет дифференциальным уравнениям (2), и мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Система дифференциальных уравнений* (1) *при условиях* а), б) *и* в) *имеет n частных решений вида*

$$y_j = y_{jk}(t) = \exp \int_{t_0}^{t} w_k(t)\, dt\, \eta_{jk}(t), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\eta_{jk}(t)$ — *функции, непрерывные в бесконечном интервале* (t_0, ∞), *и* $\eta_{jk}(\infty) = 0$ *при* $j \neq k$, $\eta_{kk}(\infty) = 1$.

2. Рассмотрим теперь системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x, \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{6}$$

приводимые к виду (1) линейной подстановкой $x = B(t)\, y$.

Первый случай приведения содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Если элементы матриц* $A_0'(t)$ *и* $A_1(t)$ *суммируемы в интервале* $(0, \infty)$ *и матрица* $A_0(\infty)$ *не имеет кратных собственных чисел, то система дифференциальных уравнений* $dx/dt = [A_0(t) + A_1(t)]\, x$ *приводится к виду* $dy/dt = [W(t) + C(t)]\, y$, *где* $C(t)$ — *матрица, элементы которой суммируемы в интервале* (t_0, ∞) *при достаточно большом* t_0, *а* $W(t)$ — *диагональная матрица. Матрица* $B(t)$, *определяющая подстановку* $x = B(t)\, y$, *и матрица* $W(t)$ *находятся из уравнения* $A_0(t)\, B(t) = B(t)\, W(t)$.

Действительно, в этом случае $C(t) = B^{-1}(t)\, [A_1(t)\, B(t) - B'(t)]$. Из условий теоремы 2 следует существование интервала (t_0, ∞), в котором матрица $A_0(t)$ не имеет кратных собственных чисел. В этом интервале $\det B(t) \neq 0$ и элементы матрицы $B'(t)$ суммируемы, что и доказывает теорему 2. Матрица $W(t)$ непрерывна в интервале (t_0, ∞), и если она удовлетворяет условию а) теоремы 2, система дифференциальных уравнений $dx/dt = [A_0(t) + A_1(t)]x$ обладает n линейно независимыми решениями $x_i = x_{ik}(t)$, имеющими в интервале $(t_0, \infty$ вид:

$$x_i = x_{ik}(t) = \exp \int_{t_0}^{t} w_k(t)\,dt \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\,\eta_{jk}(t), \tag{7}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $b_{ij}(t)$ — элементы матрицы $B(t)$. Так как $\int_{t_0}^{t} u_k(t)\,dt = u_k(\infty)\,t + o(t)$, характеристические числа решений (7) λ_k ([1]) соответственно равны: $\lambda_k = -u_k(\infty)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Установленная нами структура (7) решений системы дифференциальных уравнений $dx/dt = [A_0(t) + A_1(t)]x$ позволяет решить вопрос об устойчивости движения, определяемого этими уравнениями, и в том случае, когда среди характеристических чисел λ_k отсутствуют отрицательные, но имеются числа, равные нулю. Для того чтобы движение было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы функция $U(t) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \int_{t_0}^{t} u_k(t)\,dt$ при $t \to \infty$ оставалась ограниченной сверху.

3. Следующий случай приведения системы (6) к виду (1) содержится в теореме 3.

Теорема 3. *Пусть $B(t)$, $W(t)$, $X_0(t)$, $X_1(t)$ и $X(t)$ — матрицы, последовательно определяемые из уравнений*

$$(A_0 + A_1)B = BW, \quad X_iW - WX_i = \left(B^{-1}\frac{dA_i}{dt}B\right)^{*}, \quad i = 0, 1,$$

$$XW - WX = -X_0$$

(звездочка у матрицы обозначает замену ее диагональных элементов нулями) при том дополнительном условии, что диагональные элементы матриц $B^{-1}dB/dt$, X_0, X_1 и X должны быть равны нулю (при этом условии матрицы B, W, X_0, X_1 и X определяются однозначно). Тогда, если элементы матриц dX/dt, X_0X, X_1 и $B^{-1}A_2B$ суммируемы в интервале (τ, ∞) и $\det[I + X(\infty)] \neq 0$, подстановка $x = B(I + X)y$ приводит систему дифференциальных уравнений $dx/dt = [A_0(t) + A_1(t) + A_2(t)]x$ к виду $dy/dt = [W(t) + C(t)]y$, где $C(t)$ — матрица, элементы которой суммируемы в интервале (t_0, ∞) при достаточно большом t_0, а $W(t)$ — диагональная матрица.

Действительно, в этом случае $(I + X)C = (B^{-1}A_2B - X_1)(I + X) - X_0X - dX/dt$. Элементы матрицы, стоящей в правой части этого равенства, суммируемы в интервале (τ, ∞). В то же время всегда можно выбрать такое $t_0 \geqslant \tau$, при котором $\det[I + X(t)]$ не обращается в нуль в интервале (t_0, ∞). Этим и доказывается теорема 3.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[a(t)\frac{d^2z}{dt^2}\right] + \frac{d}{dt}\left[b(t)\frac{dz}{dt}\right] + c(t)z = \lambda z. \tag{8}$$

Полагая $z = x_1$, $\frac{dz}{dt} = x_2$, $a\frac{d^2z}{dt^2} = x_3$, $\frac{d}{dt}\left(a\frac{d^2z}{dt^2}\right) + b\frac{dz}{dt} = x_4$, получим уравнения $\frac{dx_1}{dt} = x_2$, $\frac{dx_2}{dt} = a^{-1}x_3$, $\frac{dx_3}{dt} = -bx_2 + x_4$, $\frac{dx_4}{dt} = (\lambda - c)\,x_1$, которые можно представить в форме $dx/dt = (A_0 + A_1 + A_2)\,x$, где

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Пусть, далее, $a^{-1}(t)\,[\lambda - c(t)] \neq 0$ при $t \geqslant \tau_0$. Последовательно найдем: $X_0(t) = a^{-1}(t)\,\rho^{-1}(t)\,c'(t)\,T_1$, $X_1(t) = a^{-1}(t)\,a'(t)\,T_2$, $X(t) = a^{-1}(t)\,\rho^{-5/4}(t)\,c'(t)\,T_3$, $B^{-1}(t)\,A_2(t)\,B(t) = a^{-1}(t)\,\rho^{-1/4}(t)\,b(t)\,T_4$, где $\rho = |a^{-1}(t)\,[\lambda - c(t)]|$, а T_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — числовые матрицы. Условия теоремы 3 в данном случае принимают вид: $a^1(t) \in Z(\tau, \infty)$, $a(t) \neq 0$ в интервале (τ, ∞),

$$|\lambda - c(t)|^{-1/4}\, b(t) \in Z(\tau, \infty), \quad |\lambda - c(t)|^{-9/4} c'^2(t) \in Z(\tau, \infty),$$
$$|\lambda - c(t)|^{-5/4} c''(t) \in Z(\tau, \infty), \quad \tau \geqslant \tau_0 \tag{9}$$

(если выполняются условия (9), то $X(\infty) = 0$).

Если условия (9) выполняются и $a^{-1}(t)\,[\lambda - c(t)] > 0$ при $t \geqslant \tau$, то из теорем 1 и 3 следует существование четырех линейно независимых решений уравнения (8) $z_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, допускающих при больших значениях t асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= |\lambda - c(t)|^{-3/8} \cos \xi(t)\,[1 + o(1)], \\ z_2(t) &= |\lambda - c(t)|^{-3/8} \sin \xi(t)\,[1 + o(1)], \\ z_3(t) &= |\lambda - c(t)|^{-3/8} e^{-\xi(t)}\,[1 + o(1)], \\ z_4(t) &= |\lambda - c(t)|^{3/8} e^{\xi(t)}\,[1 + o(1)], \end{aligned} \tag{10}$$

$$\xi(t) = \int_\tau^t \left[\frac{\lambda - c(t)}{a(t)}\right]^{1/4} dt.$$

Аналогичные асимптотические формулы можно построить и для функций $\frac{dz_i}{dt}$, $a\frac{d^2z_i}{dt^2}$ и $\frac{d}{dt}\left(a\frac{d^2z_i}{dt^2}\right) + b\frac{dz_i}{dt}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Функция $c(t)$ удовлетворяет, в частности, условиям (9), если $|c(t)| \to \infty$ при $t \to \infty$, $c'(t)$ и $c''(t)$ не меняют знак в интервале (τ, ∞) и $c'(t) = O[c^\alpha(t)]$, $0 < \alpha < 5/4$. Мы получаем полную аналогию с известными исследованиями асимптотического поведения решений дифференциального уравнения второго порядка, играющими важную роль в спектральной теории дифференциальных операторов [2].

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
20 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1935. [2] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, 1950.