Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

Ш. И. МОГИЛЕВСКИЙ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 17 III 1951)

1. В настоящей заметке излагается решение проблемы устойчивости задачи Дирихле в постановке, указанной П. П. Коровкиным.

Пусть D — область пространства трех измерений (границу которой Γ, не ограничивая общности, можно считать ограниченным множеством), E — произвольное ограниченное множество типа F_σ, принадлежащее дополнению к области D, и

$$F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots, \quad F_n \subset E, \tag{1}$$

последовательность замкнутых множеств, сходящаяся к E:

$$\lim_{n\to\infty} F_n = E. \tag{2}$$

Последовательности (1) соответствует последовательность областей

$$D(F_1), D(F_2), \ldots, D(F_n), \ldots, \quad D(F_n) \supset D, \tag{3}$$

где $D(F_n)$ — область, дополнительная к множеству F_n и содержащая область D.

Пусть, далее, $f(Q)$ — непрерывная функция, заданная на границе области D, и $\varphi(P)$ — ее непрерывное продолжение на все пространство.

Лемма 1. *Последовательность функций*

$$V_{1,\varphi}(P), V_{2,\varphi}(P), \ldots, V_{n,\varphi}(P), \ldots,$$

являющихся обобщенными решениями задачи Дирихле в областях (3) *для граничных значений* $\varphi(P)$, *сходится в области* $D(\overline{E})$ *к предельной гармонической функции* $V_{f\varphi}(P)$.

Задача Дирихле называется устойчивой в области D относительно множества E, если:

а) функция $V_{f\varphi}(P)$ не зависит от представления множества E в виде (2);

б) $V_{f\varphi}(P)$ не зависит от способа непрерывного продолжения на все пространство функции $f(Q)$;

в) для всякой непрерывной функции $f(Q)$, заданной на Γ,

$$V_{f\varphi}(P) = U_f(P), \quad P \in D,$$

где $U_f(P)$ — обобщенное решение задачи Дирихле в области D для граничных значений $f(Q)$.

Точка Q_0 границы области D называется точкой устойчивости задачи Дирихле относительно множества E, если для любых непрерывных граничных значений $f(Q)$

$$\lim_{P \to Q_0} V_{f\varphi}(P) = f(Q_0).$$

2. В разрешении проблемы устойчивости задачи Дирихле существенную роль играет функция $G_E(P)$, определенная в области $D(\overline{E})$ как предел последовательности функций Грина областей (3) с общим полюсом, принадлежащим области D. Для области, содержащей бесконечно удаленную точку, столь же существенной является функция $U_E(P)$, определенная в $D(\overline{E})$ как предел последовательности обобщенных решений задачи Дирихле в областях (3) для граничных значений $\varphi(P) \equiv 1$. Существование функций $G_E(P)$ и $U_E(P)$ следует из леммы 1.

Легко доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Функции $G_E(P)$ и $U_E(P)$ не зависят от выбранной последовательности* (1) *замкнутых множеств.*

Тесную связь функции $U_E(P)$ с емкостью множества E устанавливает лемма 3.

Лемма 3. *Пусть D — произвольная область, содержащая бесконечно удаленную точку, и E — ограниченное множество типа F_σ, принадлежащее множеству $F = CD$.*

Для того чтобы функция $U_E(P)$ совпадала в D с функцией $U_{f=1}(P)$ — обобщенным решением задачи Дирихле в области D для граничных значений $f(Q) = 1$,

$$U_E(P) = U_{f=1}(P),$$

необходимо и достаточно, чтобы емкость множества E была равна емкости замкнутого множества F

$$c(E) = c(F).$$

Замечание. Функцию $G_E(P)$ впервые рассматривал П. П. Коровкин ([1]) для области в плоскости комплексного переменного. П. П. Коровкин в рассмотренном им случае установил для функции $G_E(P)$ теорему, аналогичную лемме 3.

Функция $V_{f\varphi}(P)$ не зависит от выбранной последовательности (1) замкнутых множеств, как показывает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть D — произвольная область и E — ограниченное множество типа F_σ, принадлежащее дополнению к области D.*

Если $f(Q)$ — непрерывная функция, определенная на границе Γ области, то для заданной функции $\varphi(P)$, непрерывной во всем пространстве и совпадающей с $f(Q)$ на Γ, функция $V_{f\varphi}(P)$ не зависит от последовательности (1).

Характеристику множеств E, для которых функция $V_{f\varphi}(P)$ не зависит от способа непрерывного продолжения на все пространство непрерывной функции $f(Q)$, заданной на границе области, дает теорема 2.

Теорема 2. *Пусть D — область, содержащая бесконечно удаленную точку, E — ограниченное множество типа F_σ, $E \subset CD$.*

Для того чтобы функция $V_{f\varphi}(P)$ не зависела от способа непрерывного продолжения на все пространство непрерывной функции $f(Q)$, заданной на границе области, необходимо и достаточно, чтобы емкость пересечения любой области Δ, содержащей замкну-

тую область $\overline{D}$, с множеством E была равна емкости множества E

$$c(E\Delta) = c(E), \qquad \Delta \supset \overline{D}.$$

Эта теорема применима и для ограниченных областей после преобразования их в бесконечные посредством инверсии.

Необходимые и достаточные условия устойчивости задачи Дирихле относительно множества E в граничной точке области устанавливают следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть Q_0 — граничная точка области D, λ_n — емкость множества E_n точек множества E типа F_σ, $E \subset CD$, расстояния которых от точки Q_0 заключены между 2^{-n} и 2^{-n+1}.*

Для того чтобы точка Q_0 была точкой устойчивости задачи Дирихле относительно множества E, необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \lambda_n.$$

Теорема 4. *Для того чтобы точка Q_0 границы области D была точкой устойчивости задачи Дирихле относительно множества E типа F_σ, принадлежащего дополнению к области D, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{P \to Q_0} G_E(P) = 0, \qquad P \in D.$$

Теорема 5. *Пусть D — область, содержащая бесконечно удаленную точку. Для того чтобы точка Q_0 границы области D была точкой устойчивости задачи Дирихле относительно множества E типа F_σ, $E \subset CD$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{P \to Q_0} U_E(P) = 1, \quad P \in D.$$

Приведем теперь критерии устойчивости задачи Дирихле области D относительно множества E.

Теорема 6. *Для того чтобы задача Дирихле была устойчива в области D относительно множества E типа F_σ, $E \subset CD$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$G_E(P) = g(P), \qquad P \in D,$$

где $g(P)$ — функция Грина области D.

Теорема 7. *Пусть D — область, содержащая бесконечно удаленную точку. Для того чтобы задача Дирихле была устойчива в области D относительно множества E типа F_σ, $E \subset CD$, необходимо и достаточно, чтобы функция $U_E(P)$ совпадала в области D с функцией $U_{f=1}(P)$*

$$U_E(P) = U_{f=1}(P).$$

Из теоремы 6 и известного признака Булигана ([2]) регулярности граничной точки области вытекает теорема 8.

Теорема 8. *Для того чтобы задача Дирихле была устойчива в области D относительно множества E типа F_σ, $E \subset CD$, необходимо и достаточно, чтобы она была устойчива в каждой регулярной точке границы области.*

Из теоремы 7 и леммы 3 следует теорема 9.

Теорема 9. *Пусть D — область, содержащая бесконечно удаленную точку. Для того чтобы задача Дирихле была устойчива внутри области D относительно множества E типа F_σ, принадлежащего множеству $F = CD$, необходимо и достаточно, чтобы емкость множества E была равна емкости замкнутого множества F*

$$c(E) = c(F).$$

3. Вопрос об устойчивости задачи Дирихле был впервые рассмотрен М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым ([3–5]) в следующей постановке:

1) область D не содержит внутренних граничных точек;

2) множество E есть дополнение к замкнутой области $\overline{D}$;

3) задача Дирихле в областях (2) разрешима;

4) всякое замкнутое множество, принадлежащее дополнению к замкнутой области $\overline{D}$, начиная с некоторого номера n, находится вне областей $D(F_n)$.

Приведенные в п. 2 критерии устойчивости задачи Дирихле являются обобщениями критериев, установленных ранее М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым (теоремы 3, 4, 5 и 8) и M. Inoue ([6]) (теоремы 6, 7 и 9) в указанной М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым постановке проблемы устойчивости задачи Дирихле.

Калининский государственный педагогический институт

Поступило 14 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Коровкин, ДАН, **61**, № 5, 781 (1948). [2] G. Bouligand, Ann. Soc. Math., **4**, 57 (1925). [3] М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев, Изв. АН СССР, сер. матем., № 4, 551 (1937). [4] М. В. Келдыш, ДАН, **18**, 315 (1938). [5] М. В. Келдыш, Усп. матем. наук, **8**, 171 (1941). [6] M. Inoue, Proc. Imp. Acad. Jap., **14**, 27 (1938).