Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

Б. Я. ЛЕВИН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 IV 1951)

Мы будем называть H-полиномом полином без корней в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$. Очевидно, что H-полиномы принадлежат классу $\overline{HB}$. Таким образом, функции, предельные для H-полиномов в смысле равномерной сходимости в каждой конечной области, образуют подкласс класса $\overline{HB}$. Мы обозначим его P^* *.

Теорема 1. *Для того чтобы целая функция $\omega(z)$ принадлежала классу P^*, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу $\overline{HB}$ и имела вид*

$$\omega(z) = e^{-\gamma z^2}\omega_1(z) \quad (\gamma \geqslant 0), \tag{1}$$

где $\omega_1(z)$ — функция не выше чем первого рода.

Эта теорема непосредственно следует из теоремы Лагерра — Полиа ([2, 3]). Иначе условия теоремы 1 могут быть записаны в форме

$$\omega(z) = cz^m e^{-\gamma z^2 + \delta z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{z/a_k}, \tag{2}$$

причем: а) $\gamma \geqslant 0$; б) $\operatorname{Im} a_k \geqslant 0$; в) $\operatorname{Im} \delta + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} \geqslant 0$; г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^2} < \infty$.

Класс P^* и оператор дифференцирования. По известной теореме Гаусса, производная от H-полинома есть H-полином. Переходя к пределу, убеждаемся в том, что оператор дифференцирования переводит функции класса P^* в функции того же класса. Следующая теорема показывает, что класс P^* в известном смысле наиболее широкий класс функций, допускающий дифференцирование.

Теорема 2. *Если $\omega(z)$ — целая функция и при любом вещественном τ функция $[e^{\tau z}\omega(z)]' \in \overline{HB}$, то $\omega(z) \in P^*$.*

Доказательство. Пусть $\omega(z) = P(z) + iQ(z)$. Из условия теоремы следует, что при всех вещественных τ функции $P'(z) + \tau P(z)$ и $Q'(z) + \tau Q(z)$ образуют вещественную пару. Таким образом, все корни функции $P'(z) + \tau Q'(z)$ вещественны и, следовательно, при $\operatorname{Im} z > 0$ величина $\operatorname{Im}[P'(z)/P(z)]$ сохраняет знак. По теореме Н. Г. Чеботарева ([4]), отсюда следует, что

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = -2\gamma z + \delta + \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k}\right] \quad (\gamma \geqslant 0;\ \delta,\ a_k \text{ вещественны}), \tag{3}$$

$$P(z) = ce^{-\gamma z^2 + \delta z} \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{z/a_k}, \text{ т. е. } P(z) \in P^*.$$

---

* Мы будем пользоваться определениями и обозначениями, принятыми в нашей заметке ([1]).

Аналогично показывается, что $Q(z) \in P^*$. Так как при любых вещественных μ, ν и τ все корни функции $\mu[P'(z) + \tau P(z)] + \nu[Q'(z) + \tau Q(z)]$ вещественны, то, деля на τ и переходя к пределу при $\tau \to \infty$, получаем, что $P(z)$ и $Q(z)$ — вещественная пара. Отсюда можно получить, что либо $\omega(z) \in P^*$, либо $\overline{\omega}(z) \in P^*$. Так как $\omega'(z) \in \overline{HB}$, то получаем, что $\omega(z) \in P^*$.

Теорема 3. (Характеристическое свойство функций класса P^*). *Для того чтобы целая функция $\omega(z)$ была класса P^*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\omega(z - ih) \in \overline{HB} \tag{4}$$

при любом $h > 0$.

Необходимость следует из того, что этим свойством обладают H-полиномы и оно выдерживает предельный переход. Для доказательства достаточности заметим, что при выполнении условия (4), если $\operatorname{Im} z_0 < 0$, то имеет место неравенство $|\omega(z + z_0 - ih/2)| \geqslant |\omega(\overline{z} + z_0 - ih/2)|$, или, если положить $z = -ih/2$,

$$|\omega(z_0 - ih)| \geqslant |\omega(z_0)| \quad \text{при } \operatorname{Im} z_0 \leqslant 0 \text{ и } h > 0. \tag{5}$$

Равенство возможно лишь при $\omega(z) = ce^{\delta z}$ (δ — вещественное). Функция $\omega(z - ih)$ есть $\overline{HB}$-мажоранта для функции $\omega(z)$.

В самом деле, при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ в силу (5) имеем

$$|\omega(z - ih)| \geqslant |\omega(z)| \geqslant |\omega(\overline{z})|.$$

Из теоремы 1 в [1] отсюда следует, что

$$[\omega(z - ih) - \omega(z)] \cdot (ih)^{-1} \in \overline{HB},$$

и, переходя к пределу, получаем $\omega'(z) \in \overline{HB}$. Но если $\omega(z)$ удовлетворяет условию (4), то при любом вещественном τ функция $e^{\tau z}\omega(z)$ удовлетворяет (4) и, следовательно, $[e^{\tau z}\omega(z)]' \in \overline{HB}$ при любом вещественном τ. По теореме 3, $\omega(z) \in P^*$.

Теорема 4. *Для того чтобы функция*

$$\varphi_\nu(z) = f(z) - \nu\omega(z) \tag{6}$$

при любом $|\nu| \geqslant 1$ принадлежала классу P^*, необходимо и достаточно: а) $\omega(z) \in P^*$ *и* б) $\omega(z)$ *есть $\overline{HB}$-мажоранта функции $f(z)$ (P^*-мажоранта).*

Иначе: P^* — *допустимый класс.*

Доказательство. Пусть $\varphi_\nu(z) \in P^*$. Имеем $\omega(z) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \nu^{-1}\varphi_\nu(z)$ и, следовательно, $\omega(z) \in P^*$. Кроме того, по теореме 1 заметки [1], $\omega(z)$ есть $\overline{HB}$-мажоранта функции $f(z)$. Наоборот, если $\omega(z) \in P^*$ и является HB-мажорантой $f(z)$, то из (5) легко получить, что $\omega(z - ih)$ при $h > 0$ является $\overline{HB}$-мажорантой для функции $f(z - ih)$ и, по теореме 1 заметки [1], $\varphi_\nu(z - ih) \in \overline{HB}$ при всех $h \geqslant 0$ и $|\nu| \geqslant 1$. По теореме 4, отсюда следует, что при $|\nu| \geqslant 1$ $\varphi_\nu(z) \in P^*$.

Из теорем 2 и 4 следует, в частности, что производная любого порядка от P^*-мажоранты какой-нибудь функции является P-мажорантой для производной того же порядка этой функции. При этом из классов функций, допускающих умножение на $e^{\tau x}$ (τ — вещественное), P^* — наиболее широкий класс, обладающий указанным свойством.

Аддитивный однородный оператор, определенный на линейной оболочке P^* и оставляющий инвариантным класс P^*, мы назовем $\mathfrak{B}^*$-оператором. Кроме оператора дифференцирования, есть множество других $\mathfrak{B}^*$-операторов. Таковы операторы, рассмотренные мною в статьях ([5], [6]), и вообще все $\mathfrak{B}$-операторы над полиномами, выдерживающие предельный переход. Таков оператор Γ — умножения коэффициентов разложения функции на «последовательность множителей первого рода». Множители 1; 1; $1-\frac{1}{n}$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$, определяют оператор Иенсенса, переводящий всякую функцию класса P^* в H-полином.

Класс P^*-функций от нескольких переменных. Полином $P(z, u)$ от двух переменных* мы будем называть H-полиномом, если $P(z, u) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$, $\operatorname{Im} u < 0$. Из этого определения следует, что при $\operatorname{Im} u \leqslant 0$ и $\operatorname{Im} z \leqslant 0$

$$|P(z, u)| \geqslant |P(\bar{z}, u)|, \quad |P(z, u)| \geqslant |P(z, \bar{u})|. \tag{7}$$

Из второго из этих неравенств следует, что $|\overline{P}(\bar{z}, u)\cdot[P(z, u)]^{-1}| \leqslant 1$ при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, $\operatorname{Im} u \leqslant 0$. Таким образом, если положить $\varphi(z, u) = \overline{P}(z, u)\,[P(z, u)]^{-1}$, то при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ и $\operatorname{Im} z = 0$ будем иметь $|\varphi(z, u)| \leqslant 1$. Применяя принцип Фрагмена и Линделефа в полуплоскости $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, мы получим, что

$$|P(z, u)| \geqslant |P(\bar{z}, \bar{u})| \quad \text{при } \operatorname{Im} z \leqslant 0,\ \operatorname{Im} u \leqslant 0. \tag{8}$$

Итак, H-полином есть полином, принадлежащий $\overline{HB}$ ([1]). H-полиномы образуют, очевидно, допустимый класс.

Для любого полинома $P_{n,m}(z, u)$ можно построить мажоранту $\omega_{n,m}(z, u) = \lambda(z-i)^n(u-i)^m$, выбрав λ достаточно большим. Предел равномерно сходящейся в любой ограниченной области последовательности H-полиномов есть целая функция класса $\overline{HB}$. Все такие пределы образуют подкласс $\overline{HB}$, который мы обозначим P^*. Очевидно, что функция $\omega(z, u)$ класса P^* должна удовлетворять условиям:

$$\begin{gathered} \omega(z, u) \in \overline{HB}, \quad \omega(z, u) \in P_z^* \quad \text{при } \operatorname{Im} u \leqslant 0, \\ \omega(z, u) \in P_u^* \quad \text{при } \operatorname{Im} z \leqslant 0. \end{gathered} \tag{A}$$

Функции, удовлетворяющие условию (A), образуют допустимый класс. В самом деле, если $\omega(z, u)$ есть $\overline{HB}$-мажоранта функции $f(z, u)$, то, по теореме 1 заметки ([1]), $\varphi_\nu(z, u) = f(z, u) - \nu\omega(z, u) \in \overline{HB}$ при $|\nu| \geqslant 1$. Кроме того, при фиксированном u ($\operatorname{Im} u \leqslant 0$) функция $\omega(z, u)$ есть P^*-мажоранта функции $f(z, u)$ и, по теореме 4, $\varphi_\nu(z, u) \in P_z^*$. Аналогично показывается, что при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ $\varphi_\nu(z, u) \in P_u^*$.

Теорема 5. *Всякий $\mathfrak{B}^*$-оператор над целыми функциями одной переменной, непрерывный в смысле равномерной сходимости, в любой конечной области переводит функции $\omega(z, u)$, удовлетворяющие условиям* (A), *в функции того же класса.*

---

* Мы ограничимся случаем функций от двух переменных для сокращения записи.

Доказательство. Из непрерывности $\mathfrak{B}^*$-оператора следует, что функция $\mathfrak{B}_z^*\{(ih)^{-1}[\omega(z, u-ih)-\omega(z, u)]\}$ имеет предел при $h\to 0$ и, следовательно, $\mathfrak{B}_z^*[\omega(z, u)]$ — целая функция от двух переменных. По определению $\mathfrak{B}^*$-оператора $\varphi(z, u)\in P_z^*$ при $\operatorname{Im} u\leqslant 0$. Легко видеть из определения класса $\overline{\overline{HB}}$, что функция $\omega(z, u)$, рассматриваемая как функция от z, является при $\operatorname{Im} u<0$ $\overline{\overline{HB}}$-мажорантой, а следовательно, P_z^*-мажорантой функции $\omega(z, \bar{u})$. Оператор $\mathfrak{B}^*$ сохраняет соотношение мажорации и, следовательно, при $\operatorname{Im} z\leqslant 0$, $\operatorname{Im} u\leqslant 0$

$$|\varphi(z, u)|\geqslant|\varphi(z, \bar{u})|, \qquad |\varphi(z, u)|\geqslant|\varphi(\bar{z}, \bar{u})|,$$

т. е. $\varphi(z, u)\in\overline{\overline{HB}}$. В силу характеристического свойства функций класса P^*, при любом $h>0$, $\omega(z, u-ih)$ удовлетворяет условиям (A) и, следовательно, $\varphi(z, u-ih)\in HB$ при $h\geqslant 0$.

Таким образом, $\varphi(z, u)\in P_u^*$, т. е. $\varphi(z, u)$ удовлетворяет условиям (A). Теорема доказана.

Применяя к функции

$$\omega(z, u)=\sum_{k,p=0}^{\infty} a_{kp}z^k u^p, \tag{9}$$

удовлетворяющей условиям (A), оператор Иенсена, который является $\mathfrak{B}^*$-оператором по z и по u, получим последовательность H-полиномов

$$P_{n,m}^{\omega}(z, u)=\sum_{k,p=0}^{n,m}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)a_{kp}z^k u^p, \tag{10}$$

которая при $n\to\infty$ и $m\to\infty$ сходится к функции $\omega(z)$.

Таким образом мы получаем следующее обобщение теоремы Лагерра — Полиа на функции от нескольких переменных:

Теорема 6. *Для того чтобы целая функция* $\omega(z, u)$ *была пределом последовательности H-полиномов, необходимо и достаточно, чтобы* $\omega(z, u)$ *удовлетворяла условиям* (A).

Из теоремы 6 следует, что оператор частного дифференцирования $\partial^{l+k}/\partial x^l\partial y^k$ есть $\mathfrak{B}^*$-оператор для функций двух переменных и, следовательно, P^*-мажоранту переводит в P^*-мажоранту. Можно показать, сославшись на теорему 3, что P^* — наиболее широкий класс функций, выдерживающий умножение на $e^{\tau_1 x+\tau_2 y}$ (при вещественных τ_1 и τ_2) и дифференцирование по обеим переменным.

Харьковский
горный институт

Поступило
17 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Я. Левин, ДАН, 78, № 5 (1951). [2] E. Laguerre, Oeuvres, 1, Paris, 1898, p. 174—177. [3] E. Lindwart e G. Pólya, Rendiconti del Circ. Math. Palermo, 37, 297 (1914). [4] Н. Г. Чеботарев, Math. Ann., 99, 660 (1928). [5] Б. Я. Левин, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, № 1, 45 (1950). [6] Б. Я. Левин, ДАН, 65, № 5 (1949).