Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 6

МАТЕМАТИКА

П. П. КОРОВКИН

О РОСТЕ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 17 III 1951)

Пусть D — область плоскости комплексного переменного, граница Γ которой имеет положительную емкость (трансфинитный диаметр). Мы считаем границу Γ ограниченным множеством.

Теорема 1. *Если $f(z)$ однозначна и регулярна внутри D кроме полюсов в точках $z_i \in D$, $i = 1, 2, \ldots, n$, порядков m_i; если, кроме того,*

$$\overline{\lim_{z \to x}} |f(z)| \leqslant F(x), \quad x \in \Gamma, \quad z \in D,$$

где $F(x)$ — непрерывная функция, отличная от нуля, то

$$|f(z)| \leqslant e^{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i g(z, z_i) - v_{\Gamma, \varphi}(z)}, \tag{1}$$

где $g(z, z_i)$ — функция Грина области D с особенностью в точке z_i, а $v_{\Gamma, \varphi}(z)$ — обобщенное решение задачи Дирихле в области D с граничными значениями $\varphi(x) = \ln F(x)$.

Доказательство. Функция

$$u(z) = \ln|f(z)| - \sum_{i=1}^{n} m_i g(z, z_i) - v_{\Gamma, \varphi}(z)$$

субгармоническая в области D, ограничена сверху и

$$\overline{\lim_{z \to x}} u(z) = \ln F(x) - \ln F(x) = 0,$$

если x — регулярная точка границы Γ.

Следовательно, $u(z) \leqslant 0$ в области D. Этим теорема 1 доказана.

Замечание. Если функция $F(x)$ обращается в нуль в некоторых точках границы Γ, то мы полагаем,

$$v_{\Gamma, \varphi}(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} v_{\Gamma, \varphi_\varepsilon}(z), \quad \varepsilon > 0,$$

где $\varphi_\varepsilon(x) = \ln(F(x) + \varepsilon)$. При этом функция $v_{\Gamma, \varphi}(z)$ либо будет гармонической в области D, либо будет тождественно равна $-\infty$. Если $v_{\Gamma, \varphi}(z) = -\infty$, то $|f(z)| \equiv 0$.

Следствие. Если D — область, содержащая точку $z = \infty$, $f(z)$ — многочлен степени n, $|f(x)| \leqslant M$, $x \in \Gamma$, то

$$|f(z)| \leqslant M e^{n g(z, \infty)}. \tag{2}$$

Это неравенство впервые отмечено С. Н. Бернштейном для односвязных областей.

Пусть D — область, содержащая точку $z=\infty$; F — множество, дополнительное к области D; E — множество типа F_σ, $E\subset F$; F_n — замкнутое множество, $F_n\subset E$; D_n — область, дополнительная к множеству F_n и содержащая точку $z=\infty$, $D_n\supset D$.

Лемма 1. *Если $\varphi(x)$ — функция, непрерывная на множестве F, а $v_n(z)$ — обобщенное решение задачи Дирихле в области D_n с граничными значениями $\varphi(x)$, если $F_n\to E$, то существует предел*

$$v_{E,\varphi}(z)=\lim_{n\to\infty}v_n(z),\quad z\in D,$$

который не зависит от выбора F_n.

Функцию $v_{E,\varphi}(z)$ мы называем решением обобщенной задачи Дирихле в области D относительно множества E и функции $\varphi(x)$.

Заметим, что последовательность гармонических функций $v_n(z)$ равномерно сходится к гармонической функции $v_{E,\varphi}(z)$ на всяком замкнутом множестве, содержащемся в области D.

Естественно возникает вопрос: совпадает ли функция $v_{E,\varphi}(z)$ с функцией $v_{\Gamma,\varphi}(z)$?

Этот вопрос может быть обобщен следующим образом. Пусть $E_1\subset E$. При каких условиях $v_{E_1,\varphi}(z)=v_{E,\varphi}(z)$? Если $v_{E_1,\varphi}(z)=v_{E,\varphi}(z)$, то мы говорим, что обобщенная задача Дирихле устойчива относительно множества E_1 и функции $\varphi(x)$. Если устойчивость имеет место для каждой функции $\varphi(x)$, непрерывной на множестве $\bar{E}$ ($\bar{E}$ — замыкание множества E), то мы говорим, что обобщенная задача Дирихле устойчива относительно множества E_1.

Лемма 2. *Для устойчивости обобщенной задачи Дирихле относительно множества E_1 необходимо и достаточно, чтобы $c(E_1)=c(E)$, где $c(E)$ — емкость множества E.*

В частности, если $c(E)=c(F)$, то $v_{E,\varphi}(z)=v_{\Gamma,\varphi}(z)$.

Теорема 2. *Если $\{f_n(z)\}$ — последовательность многочленов степени n, причем в каждой точке множества E выполнено неравенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|f_n(x)|}\leqslant F(x),\quad x\in E, \tag{3}$$

где $F(x)$ — равномерно непрерывная на множестве E функция, то в области D, дополнительной к множеству E и содержащей точку $z=\infty$,

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|f_n(z)|}\leqslant e^{g_E(z,\infty)+v_{E,\varphi}(z)}, \tag{4}$$

где $g_E(z,\infty)$ — функция Грина, определение которой дано в ([2]) *а $\varphi(x)=\ln F(x)$, $F(x)\neq 0$.*

Доказательство. Из условия (3) следует, что последовательность функций $r^n f_n(x)F^{-n}(x)$, $0<r<1$, непрерывных на множестве E, сходится к нулю на множестве E. В силу теоремы 2 из ([1]) найдется $F_n\subset E$, $c(F_n)>c(E)-\frac{1}{n}$, сходимость на котором будет равномерной, и, следовательно, неравенство

$$|f_m(x)|<\frac{1}{r^m}F^m(x),\quad x\in F_n,\quad m>N_n,$$

будет иметь место.

В силу теоремы 1, имеем

$$|f_m(z)| \leqslant \frac{1}{r^m} e^{mg_n(z, \infty) + mv_{F_n, \varphi}(z)},$$

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \sqrt[m]{|f_m(z)|} \leqslant \frac{1}{r} e^{g_n(z, \infty) + mv_{F_n, \varphi}(z)}.$$

Так как $r < 1$ произвольно, то

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \sqrt[m]{|f_m(z)|} \leqslant e^{g_n(z, \infty) + v_{F_n, \varphi}(z)}.$$

Полагая теперь $E_1 = F_1 + F_2 + \cdots$, $c(E_1) = \lim c(E_n) = c(E)$ и пользуясь леммой 2, получим

$$\overline{\lim} \sqrt[m]{|f_m(z)|} \leqslant \lim_{n \to \infty} e^{g_n(z, \infty) + v_{F_n, \varphi}(z)} = e^{g_E(z, \infty) + v_{E, \varphi}(z)}.$$

Этим теорема доказана.

Теорема 2 была нами доказана в (2) для случая, когда $F(x) = \text{const}$. Заметим, что теорема 2 могла бы быть перенесена и на функции, удовлетворяющие условиям теоремы 1, если наложить некоторые ограничения на характер распределения полюсов функций.

Отметим еще, что неравенство (4) выполняется равномерно на каждом замкнутом множестве, принадлежащем D.

Пусть $f_n(z)$ — последовательность многочленов, удовлетворяющая неравенству (3). Положим

$$l(E, \varphi) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\max_{\overline{E}} |f_n(z)|}.$$

Число $l(E)$ зависит от взятой последовательности многочленов. Рассмотрим всевозможные последовательности многочленов, удовлетворяющие неравенству (3), и положим

$$L(E, \varphi) = \sup l(E, \varphi).$$

Теорема 3.

$$L(E, \varphi) = e^{\alpha(E, \varphi)},$$

где

$$\alpha(E, \varphi) = \sup_{x \in \Gamma} \overline{\lim_{z \to x}} \{g_E(z, \infty) + v_{E, \varphi}(z)\}.$$

Замечание. В случае, когда $\varphi(x) = \text{const}$, теорема доказана нами в (2).

Теорема 4. *Если выполнено неравенство* (3) *и* $\alpha(E, \varphi) < 0$, *то ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

равномерно сходится на открытом множестве, ограниченном кривой

$$g_E(z, \infty) + v_{E, \varphi}(z) = 0, \tag{5}$$

содержащем множество $\overline{E}$.

Эта теорема следует из теоремы 2 и определения числа $\alpha(E, \varphi)$.

Теорема 5. *Если в каждой точке* x *множества* E *имеет место неравенство*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|\Phi(x) - f_n(x)|} \leqslant F(x) < 1, \tag{6}$$

причем $\alpha(E, \varphi) < 0$, $\varphi(x) = \ln F(x)$, *то функция* $\Phi(x)$ *аналитическая на открытом множестве, ограниченном кривой* (5).

Доказательство. Положим $f_n^{(1)}(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(1)}(x), \quad f_0^{(1)}(x) = f_0(x),$$

в силу теоремы 4, равномерно сходится на множестве, ограниченном кривой (5), а в силу условия (6) на множестве E его сумма равна $\Phi(x)$.

Теорема 6. *Если функция* $\Phi(x)$ *аналитическая на множестве, ограниченном кривой* (5), *то можно указать последовательность многочленов* $f_n(x)$ *таких, что будет выполнено условие* (6).

Замечание. Теоремы 5 и 6 в том частном случае, когда E — отрезок и

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\max_E |\Phi(x) - f_n(x)|} \leqslant q < 1,$$

были впервые доказаны С. Н. Бернштейном.

В случае, когда $F(x) = \text{const}$, эти теоремы были доказаны нами ранее, но не опубликованы.

Калининский государственный
педагогический институт

Поступило
14 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Коровкин, ДАН, 58, № 7 (1947). [2] П. П. Коровкин, ДАН, 61, № 5 (1948).