Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 6

*МАТЕМАТИКА*

М. М. ВАЙНБЕРГ

# СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ У НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПОЗИТИВНЫМИ ЯДРАМИ

*(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 IV 1951)*

В ряде работ ([1–8]) различными методами было доказано существование собственных функций у нелинейного интегрального уравнения

$$\mu u(x) = \int_B K(x, y)\, g(u(y), y)\, dy, \tag{1}$$

где $B$ есть ограниченная область $n$-мерного евклидова пространства $x, y \in B$; $g(u, x)$, $-\infty < u < +\infty$, и $K(x, y)$ — действительные функции, притом $g(0, x) \equiv 0$. Метод топологической степени ([8]) налагает на ядро $K(x, y)$ весьма специальные ограничения. Другие топологические методы ([7]), свободные от таких специальных ограничений, также не предполагают симметрии $K(x, y)$, но зато налагают на это ядро $K(x, y)$ требование сильной позитивности (в одних случаях чтобы $K(x, y) \geqslant m > 0$, а в других — чтобы $\int_B K(x, y)\, dy \geqslant \alpha > 0$). Вариационные методы ([1–6]), применимые лишь в случае симметрии $K(x, y)$, вместо условия сильной позитивности $K(x, y)$ требовали лишь слабую позитивность этого ядра, т. е. чтобы все собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ядра $K(x, y)$ (в смысле теории линейных интегральных уравнений) были положительны. Таким образом, все установленные до сих пор теоремы ([1–7]) неприменимы в том случае, когда ядро $K(x, y)$ не является позитивным.

В настоящей работе мы показываем, что вариационный метод может быть видоизменен так, чтобы он охватывал и некоторый класс непозитивных ядер — когда среди собственных чисел ядра $K(x, y)$ имеется конечное число положительных. Случай, когда среди собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ядра $K(x, y)$ имеется лишь конечное число отрицательных, сводится к предыдущему путем изменения знака у $K(x, y)$ и параметра $\mu$ уравнения (1).

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

1°. *Ядро $K(x, y)$ симметрично, имеет конечное число положительных собственных чисел и удовлетворяет неравенствам:*

$$0 < \int_B \int_B K^2(x, y)\, dx\, dy = M^2 < \infty. \tag{2}$$

2°. *Оператор $hu = g(u(x), x)$ непрерывен в $L_2(B)$, притом*

$$\operatorname{sgn} g(u, x) = \operatorname{sgn} u, \tag{3}$$

$$|g(u, x)| \geqslant \alpha |u|, \quad \alpha > 0. \tag{4}$$

*Тогда уравнение* (1) *имеет не менее счетного числа собственных функций* $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$, *отвечающих положительным собственным значениям* $\mu_1, \mu_2, \ldots$, *притом* $\|\psi_1\| < \|\psi_2\| < \ldots$

Приведем вкратце доказательство этой теоремы. Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ есть ортонормальная система собственных функций ядра $K(x, y)$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(0 \leqslant |\lambda_k| \leqslant |\lambda_{k+1}|)$ — соответствующие собственные числа этого ядра. Обозначим через $q$ наибольший из номеров положительных собственных чисел $(q \geqslant 1)$, так что $\lambda_q > 0$, $\lambda_{q+k} < 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, а среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1}$ могут быть положительные и отрицательные. Рассмотрим последовательность уравнений

$$\mu u(x) = \int_B K_n(x, y)\, g(u(y), y)\, dy \quad (n = q, q+1, \ldots), \tag{5}$$

где

$$K_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{\lambda_k}.$$

Для решения уравнения (5) положим $e_k = \operatorname{sgn} \lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и рассмотрим множество функций

$$\omega^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k \xi_k^{(n)}}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k(x), \tag{6}$$

где $\xi_k^{(n)}$ — действительные числа. Затем построим функцию

$$H_n(\xi^{(n)}) = \int_B dy \int_0^{\omega^{(n)}(y)} g(v, y)\, dv, \tag{7}$$

которая ((3), стр. 375) непрерывна и имеет частные производные

$$\frac{\partial H_n(\xi^{(n)})}{\partial \xi_k^{(n)}} = \frac{e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \int_B \varphi_k(y)\, g(\omega^{(n)}(y), y)\, dy \tag{8}$$

в каждой точке $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)})$ $n$-мерного евклидова пространства. Используя соотношения (3) и (4), мы находим, что

$$H_n(\xi^{(n)}) \geqslant \frac{\alpha}{|\lambda_n|} \|\xi^{(n)}\|^2 \quad (\|\xi^{(n)}\|^2 = \xi_1^{(n)^2} + \xi_2^{(n)^2} + \cdots + \xi_n^{(n)^2}), \tag{9}$$

т. е. что $H_n(\xi^{(n)}) \geqslant 0$ и неограниченно растет вместе с $\|\xi^{(n)}\|$.

Зафиксируем теперь число $c_1 > 0$ и рассмотрим многообразие $V_n$

$$((\xi^{(n)})) = \left(\sum_{k=1}^{n} e_k \xi_k^{(n)^2}\right)^{1/2} = c_1. \tag{10}$$

Раз $H_n(\xi^{(n)})$ ограничена снизу и неограниченно растет вместе с $\|\xi^{(n)}\|$, то она достигает на многообразии $V_n$ своего абсолютного минимума $d_n$ в некоторой точке $\eta^{(n)} = (\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \ldots \eta_n^{(n)})$. Из необходимых условий существования условного экстремума мы находим, что

$$\frac{\partial}{\partial \eta_k^{(n)}} [\lambda^{(n)} ((\eta^{(n)}))^2 - 2H_n(\eta^{(n)})] = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Отсюда, согласно (10) и (11), имеем

$$\lambda^{(n)} e_k \eta_k^{(n)} - \frac{e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \int_B \varphi_k(y)\, g(\psi^{(n)}(y),\ y)\, dy, \tag{12}$$

где

$$\psi^{(n)}(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k \eta_k^{(n)}}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k(y) \tag{13}$$

и $\lambda^{(n)}$ — множитель Лагранжа данной задачи на условный экстремум. Путем умножения равенств (12) на $\varphi_k(x)/\sqrt{|\lambda_k|}$, $\eta_k^{(n)}$ и суммирования по $k$, мы найдем, что

$$\lambda^{(n)}\psi^{(n)}(x) = \int_B K_n(x,\ y)\, g(\psi^{(n)}(y),\ y)\, dy, \tag{14}$$

$$\lambda^{(n)} = \frac{1}{c_1^2} \int_B \psi^{(n)}(y)\, g(\psi^{(n)}(y),\ y)\, dy. \tag{15}$$

Далее, из (3), (4), (7) и (15) мы приходим к следующим неравенствам:

$$d_n = \int_B dy \int_0^1 \psi^{(n)}(y)\, g(t\psi^{(n)}(y),\ y)\, dt \geqslant \alpha \int_B \psi^{(n)^2}(y)\, dy =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k^{(n)^2}}{|\lambda_k|} \geqslant \frac{\alpha}{\lambda_q} \sum_{k=1}^{q} \eta_k^{(n)^2} - \alpha \sum_{k=q+1}^{n} \frac{\eta_k^{(n)^2}}{|\lambda_k|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{\lambda_q} \left( \sum_{k=1}^{q} \eta_k^{(n)^2} - \sum_{k=q+1}^{n} \eta_k^{(n)^2} \right) \geqslant \frac{\alpha}{\lambda_q} ((\eta^{(n)}))^2 = \frac{\alpha}{\lambda_q} c_1^2,$$

т. е.

$$d_n \geqslant \alpha \int_B \psi^{(n)^2}(y)\, dy \geqslant \frac{\alpha c_1^2}{\lambda_q}. \tag{16}$$

Точно так же найдем, что

$$\lambda^{(n)} \geqslant \frac{\alpha}{\lambda_q} > 0. \tag{17}$$

Но так как из постановки экстремальной задачи $d_q \geqslant d_{q+1} \geqslant \geqslant d_{q+2} \geqslant \cdots \geqslant d_n \geqslant \cdots$, то из (16) имеем

$$\frac{c_1}{\sqrt{\lambda_q}} \leqslant \| \psi^{(n)} \| \leqslant \sqrt{\frac{d_q}{\alpha}}. \tag{18}$$

Рассмотрим теперь две последовательности функций

$$f_n(x) = \int_B K(x,\ y)\, g(\psi^{(n)}(y),\ y)\, dy; \quad \Phi_n(x) = \int_B K_n(x,\ y)\, g(\psi^{(n)}(y),\ y)\, dy.$$

Так как, согласно условию 2°, $hu = g(u(x),\ x)$ непрерывен в $L_2$, то, как показал М. А. Красносельский ([9]), $hu$ ограничен во всяком шаре пространства $L_2$. Отсюда, согласно (2) и (18), непосредственно следует компактность множества $f_n(x)$. Но, так как

$$\| \Phi_n - f_n \| \leqslant \| h\psi^{(n)} \| \left( \int_B \int_B (K(x,\ y) - K_n(x,\ y))^2\, dx\, dy \right)^{1/2},$$

то, в силу того, что $K(x, y)$ можно в среднем аппроксимировать вырожденными ядрами $K_n(x, y)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Phi_n - f_n\| = 0$, а потому из компактности $f_n(x)$ следует компактность $\Phi_n(x)$. Из компактности $\Phi_n(x)$, согласно (14) и (17), следует компактность последовательности $\psi^{(n)}(x)$ $(n = q, q+1, q+2, \ldots)$, где каждое $\psi^{(n)}(x)$ есть решение уравнения (5) при $\mu = \lambda^{(n)}$. Раз последовательность $\{\psi^{(n)}(x)\}$ компактна, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{\psi^{(n_k)}(x)\}$, которая сходится к некоторой функции $\psi_1(x) \in L_2$, притом, согласно (18), $0 < c_1 / \sqrt{\lambda_q} \leqslant \|\psi_1\|$. Затем, так как $hu$ непрерывен в $L_2$, то из сходимости $\{\psi^{(n_k)}(x)\}$ к $\psi_1(x)$, согласно (15), следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda^{(n_k)} = \mu_1$, где, согласно (17), $\mu_1 \geqslant \alpha / \lambda_q$. Поступая теперь так же, как в другой работе ([3], стр. 379—381), можно показать, что $\psi_1(x)$ есть собственная функция уравнения (1), которая соответствует собственному значению $\mu_1$.

Для завершения доказательства теоремы воспользуемся тем, что $\|\psi_1\| \geqslant c_1 / \sqrt{\lambda_q}$, и рассмотрим возрастающую последовательность чисел $0 < c_1 < c_2 < \ldots$ Повторяя предыдущие рассуждения, мы для каждого числа $c_\nu$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ найдем собственную функцию $\psi_\nu(x)$ уравнения (1), которая, согласно (18), будет удовлетворять неравенству

$$\|\psi_\lambda\| \geqslant \frac{c_\nu}{\sqrt{\lambda_q}}. \tag{19}$$

Если теперь потребовать, чтобы

$$\frac{c_{\nu+1}}{\sqrt{\lambda_q}} > \|\psi_\nu\| \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{20}$$

т. е. так выбрать последовательность возрастающих чисел $c_1, c_2, \ldots$, то из (19) и (20) мы будем иметь, что $\|\psi_1\| < \|\psi_2\| < \ldots$ Разумеется, для каждого собственного значения $\mu_\nu$ будет справедлива оценка (17), т. е. $\mu_\nu \geqslant \alpha / \lambda_q > 0$. Теорема доказана.

Заметим, что данная теорема переносится на системы, рассмотренные в работе [3], притом вместо собственных значений для систем в обобщенном смысле можно говорить о собственных значениях в обычном смысле, ибо все теоремы, доказанные в работе [3], сохраняются и для систем

$$\mu u_i(x) = \int\limits_B K_i(x, y)\, g_i(u_1(y), \ldots, u_n(y), y)\, dy \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Для того чтобы убедиться в том, что все теоремы, доказанные в работе [3], сохраняются для собственных значений в обычном смысле, достаточно произвести все выкладки не для топологического произведения $n$ шаров, как это там сделано ([3], стр. 374), а для шара $\|\xi^{(m)}\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} \xi_{ik}^{(m)2} \leqslant c^2$.

Московский областной педагогический институт

Поступило
5 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Leon Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Berlin, 1931, S. 140—156. [2] M. Golomb, Math. Zs., 39, H. 1, § 5, 45 (1934). [3] М. М. Вайнберг, Матем. сборн., 26 (68), 3, 365 (1950). [4] В. И. Соболев, ДАН, 71, № 5 (1950). [5] А. П. Гремячинский, ДАН, 60, № 3 (1948). [6] Я. В. Быков, ДАН, 72, № 3 (1950). [7] М. А. Красносельский, ДАН, 76, № 4 (1951); Автореферат диссертации, Киев, 1950. [8] М. А. Красносельский, ДАН, 74, № 2 (1950). [9] М. А. Красносельский, ДАН, 73, № 1 (1950).