Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 4

АСТРОНОМИЯ

Г. Ф. ХИЛЬМИ

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ НЕРАСТОРЖИМОСТИ ЗАХВАТА В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 12 IV 1951)

Пусть P_0, P_1, P_2 — три тела, которые мы будем считать материальными точками, притягивающимися по закону Ньютона. Массы этих точек обозначим, соответственно, через m_0, m_1, m_2. Движение нашей динамической системы будем описывать в координатах Якоби; пусть x, y, z — координаты точки P_1 относительно осей с началом в точке P_0; ξ, η, ζ — координаты точки P_2 относительно осей с началом в центре тяжести точек P_0 и P_1. Координатные оси обеих систем предполагаются параллельными. Обозначим через r_{ij} расстояния между точками P_i и P_j, а через ρ — расстояние P_2 от центра тяжести P_0 и P_1.

Уравнения движения в таких координатах имеют вид:

$$\mu_1 \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mu_1 \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dU}{dy}, \quad \mu_1 \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\mu_2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \mu_2 \frac{\partial^2 \eta}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \mu_2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta},$$

где $\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}$, $\mu_2 = \frac{(m_0 + m_1) m_2}{m_0 + m_1 + m_2}$, $U = \frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}}$.

Интеграл энергии в координатах Якоби имеет вид

$$1/2\, \mu_1 v^2 + 1/2\, \mu_2 \sigma^2 = U + H,$$

где $v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, $\sigma^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$ и H — постоянная интегрирования.

Теорема 1. *Если постоянная энергии $H > 0$ и для некоторого момента времени t_0 можно указать положительное число R такое, что*

$$\rho(t_0) > 2R, \quad \rho'(t_0) > 0, \tag{1}$$

$$1/2\, \rho(t_0) < r_{12}(t_0), \quad 1/2\, \rho(t_0) < r_{02}(t_0), \tag{2}$$

$$\rho'^2(t_0) - \frac{8M}{\rho(t_0)} > \frac{2}{\mu_2} H + \frac{2 m_0 m_1}{\mu_2 R}, \tag{3}$$

где $M = m_0 + m_1 + m_2$, то при всех $t > t_0$ точка P_2 монотонно удаляется в бесконечность от центра тяжести точек P_0 и P_1, а взаимное расстояние точек P_0 и P_1 остается не превышающим R.

Момент времени t назовем регулярным, если условия

$$\rho(t) > 2R, \quad \rho'(t) > 0, \tag{4}$$

$$1/2\, \rho(t) < r_{12}(t), \quad 1/2\, \rho(t) < r_{02}(t) \tag{5}$$

выполняются при всех t', удовлетворяющих неравенствам $t_0 \leqslant t' \leqslant t$. Обозначим через Q множество всех регулярных моментов времени. Из непрерывности функций $\rho(t)$, $\rho'(t)$, $r_{12}(t)$, $r_{02}(t)$ следует, что Q — множество не пустое.

Предварительно изучим движения тел, ограничиваясь $t \in Q$. Дважды дифференцируя тождество $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, получим

$$\rho\rho'' + \rho'^2 = \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2,$$

а отсюда легко получить неравенство

$$\rho\rho'' \geqslant \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta''.$$

Пользуясь уравнениями движения, мы можем это неравенство представить также в следующем виде:

$$\rho\rho'' \geqslant \frac{1}{\mu_2}\left(\xi\frac{\partial U}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial U}{\partial \eta} + \zeta\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right).$$

Обозначим через l направление прямой, соединяющей центр тяжести точек P_0 и P_1 с точкой P_2. Тогда последнее неравенство можно записать в следующем виде:

$$\rho'' \geqslant \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial U}{\partial l}. \tag{6}$$

Дифференцируя потенциальную функцию U по направлению l, найдем:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = -\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\partial r_{12}}{\partial l} - \frac{m_0 m_2}{r_{02}^2}\frac{\partial r_{02}}{\partial l},$$

а из простых геометрических соображений следует, что

$$\left|\frac{\partial r_{12}}{\partial l}\right| \leqslant 1, \quad \left|\frac{\partial r_{02}}{\partial l}\right| \leqslant 1,$$

поэтому

$$\rho'' \geqslant -\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}^2}\right).$$

Принимая во внимание неравенство (5), получим:

$$\rho'' \geqslant -\frac{4M}{\rho^2}.$$

Умножая это неравенство на $2\rho'$ и интегрируя по времени в пределах от t_0 до $t > t_0$, но принадлежащего множеству Q, получим:

$$\rho'^2 - \frac{8M}{\rho} \geqslant \rho'^2(t_0) - \frac{8M}{\rho(t_0)} \tag{7}$$

и, тем более,

$$\rho' \geqslant \sqrt{\rho'^2(t_0) - \frac{8M}{\rho(t_0)}}. \tag{8}$$

Наконец, интегрируя это неравенство по времени от t_0 до $t > t_0$, но принадлежащего Q, получим:

$$\rho \geqslant \rho(t_0) + \sqrt{\rho'^2(t_0) - \frac{8M}{\rho(t_0)}}\,(t - t_0). \tag{9}$$

Из интеграла энергии и очевидного неравенства $\rho'^2 \leqslant \sigma^2$, после несложных преобразований, находим:

$$\frac{2m_0 m_1}{r_{01}} \geqslant \mu_2\rho'^2 - 2H - \frac{2m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{2m_0 m_2}{r_{02}}.$$

Вычитая из правой и левой частей неравенства один и тот же член, получим:

$$\frac{2m_0 m_1}{r_{01}} - \frac{2m_0 m_1}{R} \geqslant \mu_2\rho'^2 - 2H - \frac{2m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{2m_0 m_2}{r_{02}} - \frac{2m_0 m_1}{R}. \tag{10}$$

Затем из неравенства (3) и (7) следует

$$\rho'^2 - \frac{2}{\mu_2} H - \frac{2\, m_0\, m_1}{\mu_2 R} - \frac{8\, M}{\rho} > 0$$

и, тем более,

$$\rho'^2 - \frac{2}{\mu_2} H - \frac{2\, m_0\, m_1}{\mu_2 R} - \frac{4\, M}{\rho} > 0.$$

Принимая во внимание, что $\mu_2 M = m_2 (m_0 + m_1)$, мы можем последнее неравенство переписать в виде

$$\mu_2 \rho'^2 - 2H - \frac{2\, m_0\, m_1}{R} - 4 \frac{m_2 (m_0 + m_1)}{\rho} > 0,$$

или

$$\mu_2 \rho'^2 - 2H - \frac{2\, m_0\, m_1}{R} - \frac{2\, m_0\, m_2}{\rho / 2} - \frac{2\, m_1\, m_2}{\rho / 2} > 0;$$

из этого неравенства и неравенства (5) следует:

$$\mu_2 \rho'^2 - 2H - \frac{2\, m_1\, m_2}{r_{12}} - \frac{2\, m_0\, m_2}{r_{02}} - \frac{2\, m_0\, m_1}{R} > 0.$$

Наконец, из неравенства (10) и только что полученного следует:

$$\frac{2 m_0\, m_1}{r_{01}} - \frac{2\, m_0\, m_1}{R} > 0,$$

откуда

$$r_{01} < R. \tag{11}$$

Пусть $\tau = \sup Q$, если множество Q ограничено сверху, и пусть $\tau = \infty$ в противном случае. Все установленные нами свойства пока справедливы только для регулярных моментов времени, т. е. для $t < \tau$. Если мы покажем, что $\tau = \infty$, то этим самым будет доказано, что эти свойства справедливы для всех $t > t_0$. Допустим, что τ имеет конечное значение. Тогда при $t = \tau$ должно выполняться по крайней мере одно из равенств:

$$\rho(\tau) = 2R, \tag{12}$$

$$\rho'(\tau) = 0, \tag{13}$$

$${}^1/_2\, \rho(\tau) = r_{12}(\tau), \quad {}^1/_2\, \rho(\tau) = r_{02}(\tau). \tag{14}$$

Из непрерывности функции $\rho(t)$, второго из неравенств (1) и из неравенств (3) и (9) следует

$$\rho(\tau) \geqslant \rho(t_0) + \sqrt{\rho'^2(t_0) - \frac{8\, M}{\rho(t_0)}}\, (\tau - t_0) > \rho(t_0) > 2R, \tag{15}$$

а следовательно, равенство (12) невозможно.

Из непрерывности $\rho'(t)$ и неравенств (3) и (8) следует

$$\rho'(\tau) \geqslant \sqrt{\rho'^2(t_0) - \frac{8\, M}{\rho(t_0)}} > 0,$$

поэтому равенство (13) также невозможно.

Из непрерывности функции $r_{01}(t)$ и неравенства (11) следует

$$r_{01}(\tau) \leqslant R < {}^1/_2\, \rho(\tau). \tag{16}$$

С другой стороны, из простых геометрических соображений имеем

$$\rho(\tau) \leqslant r_{12}(\tau) + r_{01}(\tau), \quad \rho(\tau) \leqslant r_{02}(\tau) + r_{01}(\tau). \tag{17}$$

Из неравенств (16) и (17) находим:

$${}^1/_2\, \rho(\tau) < r_{12}(\tau), \quad {}^1/_2\, \rho(\tau) < r_{02}(\tau),$$

т. е. равенства (13) также невозможны. Следовательно, $\tau=\infty$. А тогда неравенство (9) справедливо при всех $t>t_0$, а поэтому

$$\rho(t)\to\infty \text{ при } t\to+\infty.$$

Неравенство (11) также справедливо при всех $t>t_0$. Теорема доказана.

В 1948 г. в работе ([1]) автор предложил другой критерий нерасторжимости захвата, а именно следующий:

Теорема 2. *Если постоянная энергии $H>0$ и для некоторого момента времени t_0 можно указать два положительных числа $R^{*}, < R^{*}$ такие, что*

$$r_{01}(t_0)<R^{*},\quad \rho(t_0)>2R^{*},\quad \rho'(t_0)>0, \tag{18}$$

$$\rho'^2(t_0)-\frac{8M}{\rho(t_0)}>\frac{2}{\mu_2}H+\frac{2m_0m_1}{\mu_2(R^{*}-\varepsilon)}, \tag{19}$$

то при всех $t>t_0$ точка P_0 монотонно удаляется в бесконечность от центра тяжести точек P_0 и P_1, а взаимное расстояние точек P_0 и P_1 остается не превышающим R^{*}.

Нетрудно усмотреть, что из неравенств (18), (19) и простейших свойств треугольника, образованного телами P_0, P_1, P_2, следуют неравенства вида (1), (2) и (3), в которых R надо принять равным $R^{*}-\varepsilon$. Тогда мы приходим к условиям теоремы 1, откуда немедленно следует справедливость теоремы 2.

Кроме доказанных выше двух критериев нерасторжимости захвата, в работе ([2]) предложен третий. Он опирается на теорему, изложенную автором в работе ([3]). Однако в переданном мне чл.-корр. АН СССР М. Ф. Субботиным письме Г. А. Мермана (Институт теоретической астрономии АН СССР) было указано на ошибку, содержащуюся в доказательстве теоремы. Поэтому эту теорему и критерий нерасторжимости захвата, предложенный в работе ([3]), нельзя считать доказанными.

Если при сближении независимо движущихся тел (т. е. таких, что $r_{01}\to\infty$, $r_{12}\to\infty$, $r_{02}\to\infty$ при $t\to-\infty$) в результате гравитационного взаимодействия между ними в некоторый момент t_0 сложится такое их расположение и возникнут такие относительные скорости, что будут выполняться условия теоремы 1 или 2, то тела P_0 и P_1 будут гравитационно связанными в двойную систему, а третье тело P_2 будет удаляться в бесконечность от центра тяжести P_0 и P_1. Тогда осуществится захват. Это имеет место в примере, указанном О. Ю. Шмидтом ([4]).

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
11 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Ф. Хильми, ДАН, **62**, № 1 (1948). [2] Г. Ф. Хильми, ДАН, **71**, № 6 (1950). [3] Г. Ф. Хильми, ДАН, **71**, № 5 (1950). [4] О. Ю. Шмидт, ДАН, **58**, № 2 (1947).