Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 4

МЕХАНИКА

Б. С. КОВАЛЬСКИЙ

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГРУЗА ПРИ СПУСКЕ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 28 III 1951)

Рассматриваем малые колебания груза, длина подвеса которого изменяется со скоростью v. Сопротивление движению, возникающее при перекатывании блоков по канату, принимаем постоянным и равным $W = -wmg \operatorname{sign} \dot{\varphi}$, где φ — угол отклонения подвеса от вертикали.

По теореме о равенстве производной от количества движения моменту действующих сил имеем (рис. 1)

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = -mgr\varphi + wmgr,$$

откуда

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\dot{\varphi} + \frac{g}{r}\varphi = \frac{wg}{r}.$$

где $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\varphi}$ — производные по времени t.

Пусть $r = r_0 + vt$, тогда получаем уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{g}{rv^2}\varphi = \frac{wg}{rv^2}, \tag{1}$$

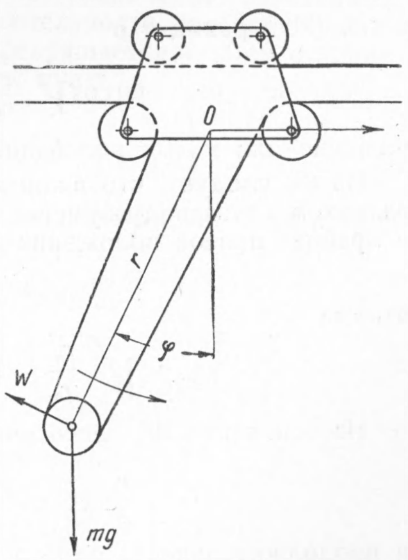

Рис. 1

имеющее решение в виде

$$\varphi - w = \frac{1}{\sqrt{r}}[AJ_1(\eta\alpha) + BY_1(\eta\alpha)], \tag{2}$$

где

$$\alpha = \frac{2\sqrt{r_0 g}}{v}, \quad \eta = \sqrt{\frac{r}{r_0}}, \tag{3}$$

а J_1 и Y_1 — функции Бесселя первого порядка, соответственно, первого и второго рода.

Дифференцирование (2) по t дает выражение $\dot{\varphi}$ в функциях Бесселя второго порядка:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\sqrt{g}}{r}[AJ_2(\eta\alpha) - BY_2(\eta\alpha)]. \tag{4}$$

Значения постоянных A и B определяются начальными условиями движения. Примем, что при $t = 0$ $\varphi(0) = \varphi_0$ и $\dot{\varphi}(0) = 0$, тогда

$$A = -\frac{\pi\sqrt{g}\, r_0}{v}(\varphi_0 - w)\, Y_2(\alpha), \quad B = \frac{\pi\sqrt{g}\, r_0}{v}(\varphi_0 - w)\, J_2(\alpha)$$

и

$$\varphi - w = \frac{\pi \sqrt{r_0 g}}{\eta} (\varphi_0 - w) [J_2(\alpha) Y_1(\eta\alpha) - Y_2(\alpha) J_1(\eta\alpha)], \tag{5}$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\pi g}{v\eta^2} (\varphi_0 - w) [J_2(\alpha) Y_2(\eta\alpha) - Y_2(\alpha) J_2(\eta\alpha)]. \tag{6}$$

Уравнение (5) дает траекторию груза в полярных координатах и закон движения груза во времени, так как $r = r(t)$.

Переход к асимптотическим значениям функций Бесселя (что оправдывается большими значениями аргументов α и $\eta\alpha$ при значениях r и v, возможных в грузоподъемных машинах) дает:

$$\varphi - w = \eta^{-3/2} (\varphi_0 - w) \cos \alpha (\eta - 1), \tag{7}$$

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{g}{r_0}}\, \eta^{-3/2} (\varphi_0 - w) \sin \alpha (\eta - 1). \tag{8}$$

(Заметим, что при $v \to 0$, $r \to r_0$

$$\lim_{v \to 0} \alpha (\eta - 1) = \lim_{v \to 0} \frac{2\sqrt{g}}{v} (\sqrt{r} - \sqrt{r_0}) = \lim_{v \to 0} \frac{2\sqrt{g}}{v} \frac{r - r_0}{\sqrt{r} + \sqrt{r_0}} = \sqrt{\frac{g}{r_0}}\, t$$

и (7), (8) переходят в

$$\varphi - w = (\varphi_0 - w) \cos \sqrt{\frac{g}{r_0}}\, t, \quad \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{r_0}} (\varphi_0 - w) \sin \sqrt{\frac{g}{r_0}}\, t$$

решение для малых колебаний при $r = \text{const}$.)

Из (8) следует, что в конце размаха $\dot{\varphi}(t) = 0$ (здесь и далее под размахом груза подразумевается отклонение его из крайнего левого в крайнее правое положение или наоборот) и

$$\alpha (\eta_n - 1) = \pi n,$$

откуда

$$\eta_n = \sqrt{\frac{r_n}{r_0}} = 1 + \frac{\pi n}{\alpha} = 1 + \frac{n\pi v}{2\sqrt{r_0 g}}. \tag{9}$$

На основании (9) легко определить время n размахов:

$$t_n = \frac{r_0}{v} (\eta_n^2 - 1) = n\pi \sqrt{\frac{r_0}{g}} + n^2 \frac{\pi^2 v}{4g} \tag{10}$$

и продолжительность одного n-го размаха:

$$T_n = t_n - t_{n-1} = \frac{r_0}{g} (\eta_n^2 - \eta_{n-1}^2) = \pi \sqrt{\frac{r_0}{g}} + (2n - 1) \frac{\pi^2 v}{4g}. \tag{11}$$

В (11) первый член равен полупериоду колебания при $r = \text{const}$, второй же член указывает на последовательное увеличение длительности размаха при спуске груза, $v > 0$ (или уменьшение при подъеме, $v < 0$), причем это увеличение

$$\Delta T = T_n - T_{n-1} = \frac{\pi^2 v}{2g}$$

прямо пропорционально скорости спуска v.

Отклонение груза от вертикали в конце первого размаха находим по (7), подставляя $r_1 = \eta_1^2 r_0$ и $\cos \pi = -1$:

$$\varphi_1 - w = -\eta_1^{-3/2} (\varphi_0 - w)$$

или, вводя $x_1 \approx r_1 \varphi_1$ и $x_0 \approx r_0 \varphi_0$,

$$x_1 = -\sqrt{\eta_1} [x_0 - w r_0 (\eta_1^{3/2} + 1)].$$

Аналогично находим $x_2, x_3, x_4, \ldots$ — до x_n:

$$x_n = (-1)^n \sqrt{\eta_n}\,(x_0 - wr_0\Phi_n), \tag{12}$$

где

$$\Phi_n = \eta_n^{3/2} + 2\eta_{n-1}^{3/2} + 2\eta_{n-2}^{3/2} + \cdots + 2\eta_1^{3/2} + 1. \tag{13}$$

При $w = 0$ формулы (10) и (11) остаются в силе, выражение же (12) упрощается:

$$x_n = (-1)^n \sqrt{\eta_n}\,x_0 = (-1)^n \left(\frac{r_n}{r_0}\right)^{1/4} x_0$$

и показывает, что при спуске груза отклонения его от вертикали возрастают пропорционально $\sqrt[4]{r}$.

При $w \neq 0$ и $r = \text{const}$ имеем $\eta_n = 1$, $\Phi_n = 2n$ и

$$x_n = (-1)^n (x_0 - 2nwr_0),$$

абсолютные значения отклонений груза в конце каждого последующего размаха уменьшаются на $2wr_0$.

При $w \neq 0$ и $r = r_0 + vt$ возможно как уменьшение отклонений груза, начиная с первого размаха, так и увеличение отклонений. Можно доказать, что при достаточной длительности колебаний увеличение отклонений в некоторый момент прекращается и затем отклонения непрерывно уменьшаются, стремясь к нулю.

Действительно, введя обозначение

$$m = \frac{\pi v}{2\sqrt{r_0 g}},$$

мы можем, при достаточно большом n, представить Φ_n (13) в виде

$$\Phi_n \approx 2\int_0^n \eta_x^{3/2}\,dx = \frac{4}{5m}\left(\eta_n^{5/2} - 1\right).$$

В этом случае, по (12),

$$|x_n| = \sqrt{\eta_n}\,(x_0 - wr_0\Phi_n) = \sqrt{\eta_n}\left[x_0 - wr_0\,\frac{4}{5m}\left(\eta_n^{5/2} - 1\right)\right].$$

Условие уменьшения отклонений имеем в виде

$$\frac{d\,|x_n|}{dn} = \frac{1}{2\sqrt{\eta_n}}\left[mx_0 - \frac{4}{5}\,wr_0\left(6\eta_n^{5/2} - 1\right)\right] < 0,$$

или

$$\eta_n > \left(\frac{1}{6} + \frac{5m}{24}\,\frac{x_0}{r_0}\right)^{2/5},$$

или

$$n > \frac{2\sqrt{r_0 g}}{\pi v}\left[-1 + \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{48}\,\frac{\pi v \varphi_0}{\sqrt{r_0 g}}\right)^{2/5}\right].$$

Очевидно, что при любых начальных условиях движения груза может быть назначено n, удовлетворяющее этому условию.

При более общем выражении $r(t)$ анализ колебаний груза несколько усложняется, решение может быть получено в бесконечных рядах. Например, в случае равноускоренного спуска груза $r = r_0 + {}^1/_2\,jt^2$ мы приходим к уравнению

$$r(r - r_0)\,\frac{d^2\varphi}{dr^2} + (5r - 4r_0)\,\frac{d\varphi}{dr} + \frac{g}{2j}\,\varphi = \frac{wg}{2j},$$

интеграл которого выражается через гипергеометрические функции

Поступило
12 III 1951