Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Е. ЛЕОНТОВИЧ

О РОЖДЕНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ОТ СЕПАРАТРИСЫ

(Представлено академиком А. А. Андроновым 31 III 1951)

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{1}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однозначные и непрерывные в некоторой области G плоскости функции с непрерывными частными производными до некоторого порядка N. Предположим, что все особые точки (x_0, y_0) системы (1) таковы, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Рассмотрим в той же области G «измененную систему»

$$\frac{dx}{dt} = P + p = \overline{P}, \quad \frac{dy}{dt} = Q + q = \overline{Q}. \tag{2}$$

Как известно, при переходе от системы (1) к системе (2) со сколь угодно малыми $p(x, y)$ и $q(x, y)$ и сколь угодно малыми производными по x и y от $p(x, y)$ и $q(x, y)$ до некоторого порядка могут рождаться предельные циклы, причем при сделанном предположении относительно состояний равновесия системы (1) возможны лишь три типа рождения предельных циклов: 1) от сложного фокуса; 2) от замкнутой траектории, характеристический показатель которой равен нулю; 3) от замкнутой кривой C, составленной из сепаратрис седел и самих седел.

Первые два случая неоднократно рассматривались *. В настоящей работе рассматривается третий случай. Ради простоты мы ограничимся лишь тем частным случаем кривой C, когда она составлена из седла и одной только сепаратрисы, выходящей из этого седла и возвращающейся в него же (общий случай рассматривается тем же методом). Такую сепаратрису назовем **сепаратрисой, образующей петлю.**

Для выяснения того, от каких величин зависит рождение предельных циклов в окрестности сепаратрисы, образующей петлю, для систем (1) и (2) строится функция последования. Функция последова-

* См., например, [1-3]. Если $\rho = f(\rho_0)$ функция последования вблизи фокуса ($\rho_0 = 0$ соответствует фокусу) и если $f'(0) - 1 = a_1$, $f^{(i)}(0) = a_i$, то число предельных циклов, могущих родиться от сложного фокуса, зависит от числа обращающихся в нуль величин a_i (величины a_i называются «фокусными величинами»). Рассматривая функцию последования вблизи замкнутой траектории, можно сделать аналогичные высказывания о числе предельных циклов, могущих родиться от замкнутой траектории.

ния составляется из двух функций соответствия, одной построенной вблизи седла и другой — вблизи части сепаратрисы L_0, лежащей вне некоторой окрестности седла. Для построения первой из этих функций соответствия записываем систему (2) (при этом система (1) рассматривается как частный случай системы (2) при $p = q = 0$) в виде одного уравнения. Предполагая p и q достаточно малыми, надлежащей линейной заменой переменных приводим это уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\overline{\lambda} y + \overline{Q}_2(x, y)}{x + \overline{P}_2(x, y)}, \tag{2*}$$

причем начало координат является седлом, так что $\overline{\lambda} > 0$. Положим $\overline{\lambda} = 1 + \overline{c}_0$. Будем в дальнейшем все величины в частном случае $p = q = 0$, т. е. в случае системы (1), обозначать буквами без черты.

Теорема 1. *Пусть при заданном n $\overline{P}_2(x, y)$, $\overline{Q}_2(x, y)$ имеют в некоторой области G_0, содержащей начало, непрерывные частные производные до порядка не меньшего $4n + 6$. Пусть $|\overline{c}_0 n| < 1$ и $\left|\frac{\overline{c}_0 n}{1 + \overline{c}_0}\right| < 1$.*

Тогда:

А. *Уравнение (2*) соответственно подобранным преобразованием переменных (взаимно-однозначными вблизи начала) может быть приведено к виду*

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\eta}{\xi}\left[1 + \overline{c}_0 + \overline{c}_1 \xi\eta + \cdots + \overline{c}_n \xi^n \eta^n + \xi^{n+1}\eta^{n+1}\overline{F}_n(\xi, \eta)\right] = \frac{\overline{K}_n(\xi, \eta)}{\eta}, \tag{2**}$$

где $\overline{c}_i$ — константы и $\overline{K}_n(\xi, \eta)$ имеет в некоторой области значений ξ, η, содержащей начало, непрерывные частные производные до порядка не меньшего $2n + 3$.

Б. *Для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, чтобы при условии*

$$|\overline{P}_2 - P_2| < \delta, \quad |\overline{Q}_2 - Q_2| < \delta,$$

$$\left|\frac{\partial^{i+k}\overline{P}_2}{\partial x^i \partial y^k} - \frac{\partial^{i+k} P_2}{\partial x^i \partial y^k}\right| < \delta, \ \left|\frac{\partial^{i+k}\overline{Q}_2}{\partial x^i \partial y^k} - \frac{\partial^{i+k} Q_2}{\partial x^i \partial y^k}\right| < \delta, \quad i + k \leqslant 4n + 6\,*$$

мы имели бы

$$|\overline{K}_n(\xi, \eta) - K_n(\xi, \eta)| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial^{j+l}\overline{K}_n(\xi,\eta)}{\partial\xi^j \partial\eta^l} - \frac{\partial^{j+l} K_n(\xi,\eta)}{\partial\xi^j \partial\eta^l}\right| < \varepsilon,$$

$$|\overline{c}_i - c_i| < \varepsilon, \qquad j + l \leqslant 2n + 3, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

($P_2(x, y)$, $Q_2(x, y)$, $K_n(\xi, \eta)$ и c_i — соответствующие величины для частного случая $p = q = 0$, т. е. для системы (1).

Будем называть величины c_i, $\overline{c}_i$ «седловыми» величинами**

---

* Указанная здесь и дальше граница $4n + 6$ для числа производных от $\overline{P}_2$ и $\overline{Q}_2$, близких к соответствующим производным P_2 и Q_2, вытекает не из существа задачи, а из использованного для ее решения метода. Есть все основания думать, что минимальное необходимое число производных существенно меньше.

** Построение функции последования вблизи сепаратрисы, образующей петлю, из двух функций соответствия было проведено Дюлаком (4). При этом Дюлак исследовал аналитический характер интеграла системы (2) вблизи седла (только в случае голоморфных $\overline{P}(x, y)$ и $\overline{Q}(x, y)$) и для этого приводил уравнение (2) к некоторому «каноническому виду» (он совпадает с видом (2**) для случая $\overline{\lambda}=1$). Однако результаты Дюлака не могут быть использованы в решении поставленной нами задачи; канонический вид уравнения по Дюлаку, в отличие от вида (2**), различен для $\overline{\lambda}$ рационального и для $\overline{\lambda}$ иррационального, что делает невозможным сравнение уравнений.

Полагая в уравнении (2**) $\xi\eta = u$, $\xi = e^{-\psi}$, получим уравнение

$$\frac{du}{d\psi} = \bar{c}_0 u + \bar{c}_1 u^2 + \cdots + \bar{c}_n u^{n+1} + u^{n+2}\, \bar{h}_n(u, \psi), \tag{3}$$

по отношению к которому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение* (3) *при всех* $|u_0| \leqslant u_0^*$ ($u_0^* > 0$ — *некоторая постоянная*) *имеет решение* $u = \bar{f}(u_0, \psi)$, *принимающее значение* $u = u_0$ *при* $\psi = -\lg u_0$ *и определенное для всех значений* ψ, $0 \leqslant \psi \leqslant -\lg u_0$. *Это решение может быть представлено в следующей форме:*

$$\bar{f}(u_0, \psi) = \bar{f}_1(\theta)\, \bar{\varphi}(u_0, \psi) + \bar{f}_2(\theta)\, [\bar{\varphi}(u_0, \psi)]^2 + \cdots + \bar{f}_n(\theta)\, [\bar{\varphi}(u_0, \psi)]^n,$$

где:

1) $\theta = \dfrac{e^{\bar{c}_0(\lg u_0 + \psi)} - 1}{\bar{c}_0}$ *при* $\bar{c}_0 \neq 0$ *и* $\theta = \lg u_0 + \psi$ *при* $\bar{c}_0 = 0$;

2) $\bar{f}_k$ — *многочлены относительно* θ *с коэффициентами, зависящими от* $\bar{c}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$;

3) *функция* $\bar{\varphi}(u_0, \psi)$ *может быть представлена в виде*

$$\bar{\varphi}(u_0, \psi) = u_0^{n+\alpha}\, \bar{\varphi}_0(u_0, \psi), \quad 0 < \alpha < 1,$$

причем

$$\frac{\partial^j \left[u_0^{n+\alpha}\, \bar{\varphi}_0(u_0, \psi)\right]}{\partial u_0^j} = u_0^{n+\alpha-j}\, \bar{\varphi}_j(u_0, \psi), \quad j \leqslant 2n+3,$$

и для всех ψ, $0 \leqslant \psi \leqslant -\lg u_0$, $|u_0| \leqslant u_0^*$

$$|\bar{\varphi}_j(u_0, \psi)| < \omega_0,$$

где $\omega_0 > 0$ — *постоянная**.

Решение $u = \bar{f}(u_0, \psi)$ находится методом последовательных приближений. Функция соответствия вблизи седла между некоторыми, определенным образом выбранными дугами без контакта l_1 и l_2 будет $u = \bar{f}(u_0, 0)$. Обозначая функцию соответствия между теми же дугами l_1 и l_2, но построенную вблизи части сепаратрисы, лежащей вне некоторой окрестности седла, через $u = \bar{\xi}\,(u_0^*)$, мы получим функцию последования

$$\bar{\xi}(u_0^*) = \bar{f}(u_0, 0),$$

где значение $u_0 = 0$ соответствует сепаратрисе как у системы (1), так и у измененной системы (2)**. В случае системы (1) введем обозначения:

$$\xi'(0) - 1 = a_1, \quad \xi^i(0) = a_i, \quad i \geqslant 2.$$

Величины a_i будем называть **сепаратрисными величинами.**

---

* Эта постоянная может быть взята одной и той же для всех p и q достаточно малых вместе со своими частными производными до порядка $4n+6$.

** Заметим, что для системы (1) мы будем иметь (опуская в записи функции последования для системы (1) черту сверху) $\xi(0) = f(0, 0)$, в то время как для измененной системы, вообще говоря, $\bar{\xi}(0) \neq \bar{f}(0, 0)$, так как у измененной системы сепаратриса, вообще говоря, уже не будет итти из седла в седло.

Далее устанавливаются еще некоторые свойства построенной таким образом функции последования. В частности, доказывается, что в случае, когда у системы (2) сепаратриса образует петлю и $\bar{c}_0 = \bar{c}_1 = \cdots = \bar{c}_n = 0$, сепаратрисные величины a_l могут быть представлены в виде некоторых интегралов с бесконечными пределами, причем структура подинтегральных выражений в точности такая же, как и в интегралах, дающих выражение для обычных коэффициентов функции последования. Аналитический характер функции последования, вытекающий из теоремы 2, и построение добавок p и q специального вида (при построении этих добавок центральную роль играет указанное выше частное свойство коэффициентов функции последования) позволяют доказать следующее предложение.

Теорема 3. *Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в системе* (1) *имеют непрерывные частные производные до порядка не меньшего $4n+6$. Если у системы* (1) *есть сепаратриса L_0, образующая петлю, и при этом $c_0 = a_1 = \cdots = c_{n-1} = a_n = 0$, $c_n \neq 0$ (или $c_n = 0$, $a_{n+1} \neq 0$), $n = 0, 1, 2, \ldots$*, то:*

1) *всегда можно указать такие $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$, чтобы при всех $p(x,y)$ и $q(x,y)$, имеющих частные производные до порядка не меньшего $4n+6$ и удовлетворяющих условиям*

$$|p| < \delta, \quad |q| < \delta,$$
$$\left|\frac{\partial^{i+k} p}{\partial x^i \partial y^k}\right| < \delta, \quad \left|\frac{\partial^{i+k} q}{\partial x^i \partial y^k}\right| < \delta, \quad i+k \leqslant 4n+6, \quad \delta \leqslant \delta_0, \quad \delta > 0, \tag{4}$$

в ε_0-окрестности сепаратрисы L_0 могло бы быть не более $2n+1$ ($2n+2$) предельных циклов системы (2);

2) *для всякого положительного $\varepsilon < \varepsilon_0$ и всякого положительного $\delta < \delta_0$ всегда можно указать такие p и q, удовлетворяющие неравенствам* (4), *чтобы в ε-окрестности сепаратрисы L_0 системы* (1), *образующей петлю, было бы $2n+1$ ($2n+2$) предельных циклов системы* (2).

Теорема 3 показывает, что в случае, когда у рассматриваемой системы сепаратриса образует петлю, величины, равенство или неравенство нулю которых определяет, при известных условиях, возможность или невозможность рождения того или другого числа предельных циклов, являются величинами двух типов: 1) «седловыми» величинами, определяемыми значениями производных от правых частей системы (1) в самом седле (эти велечины аналогичны «фокусным» величинам, характеризующим функцию последования вблизи фокуса); 2) «сепаратрисными» величинами, определяемыми значениями тех же правых частей и их производных в точках сепаратрисы, образующей петлю (эти величины аналогичны коэффициентам функции последования вблизи предельного цикла).

Горьковский исследовательский физико-технический институт

Поступило 23 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Андронов и Л. Понтрягин, ДАН, **14**, 247 (1937). [2] А. Андронов и Е. Леонтович, Уч. зап. Горьковск. гос. ун-та, **6**, 1 (1938). [3] А. Андронов и Е. Леонтович, ДАН, **21**, 427 (1938). [4] H. Dulac, Bull. Soc. Math. de France, **51**, 45 (1923).

* Случай, когда $c_0 \neq 0$, рассмотрен иначе в ([3]).