

П. Г. КОГОНИЯ

О МНОЖЕСТВЕ ЧИСЕЛ МАРКОВА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 31 III 1951)

Пусть α — иррациональное число интервала $(0,1)$, а

$$\alpha = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$$

его разложение в непрерывную дробь.

Обозначим через $L(\alpha)$ нижнюю грань тех чисел $c > 0$, для которых неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q^2}$$

имеет бесконечное множество решений в целых $q > 0, p$. Как известно ((¹), стр. 29),

$$L(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{r_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(r_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} \right)}, \quad (1)$$

где

$$r_k = [a_k; a_{k+1}, \dots], \quad \frac{p_k}{q_k} = [0; a_1, a_2, \dots, a_k]. \quad (2)$$

Из (1) и (2) очевидно, что $L(\alpha) = 0$, если $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$; если же $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} a_k < \infty$, то, как известно ((²), стр. 48), $0 < L(\alpha) \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Значения функций $L(\alpha)$ назовем числами Маркова. Введем следующие обозначения: $M(N)$ — множество всех иррациональных чисел $\alpha \in (0, 1)$, для которых $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = N$; $\overline{M}(N)$ — множество всех иррациональных чисел $\alpha \in (0, 1)$, для которых $1 \leq a_k \leq N$; $M_L(N)$ — множество чисел Маркова, соответствующих всем числам $\alpha \in M(N)$. Очевидно, что

$$M = \sum_{N=1}^{\infty} M(N) = \sum_{N=1}^{\infty} \overline{M}(N) \quad (3)$$

будет множеством всех иррациональных чисел $\alpha \in (0, 1)$ с ограниченными неполными частными, а

$$M_L = \sum_{N=1}^{\infty} M_L(N) \quad (4)$$

будет множеством всех чисел Маркова (отличных от нуля). Как известно, M является множеством меры нуль ⁽²⁾, стр. 79).

Теорема 1. $M_L(N)$ имеет мощность континуума при $N \geq 2$.

Доказательство. 1. $N \geq 4$. Пусть $\beta = [0; b_1, b_2, \dots, b_k, \dots]$ пробегает множество $\overline{M}(N-2)$, являющееся, очевидно, множеством мощности континуума. Пусть $S_k = [0; b_1, b_2, \dots, b_k]$, тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \beta$.

Рассмотрим некоторую последовательность $\{k_n\}$ натуральных чисел, удовлетворяющую условиям

$$k_{n+1} > k_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (k_{n+1} - k_n) = \infty. \quad (5)$$

Пусть

$$d_n = k_{n+1} - k_n - 1 = d'_n + d''_n, \quad \lim d'_n = \lim d''_n = \infty \\ (d_0 = k_1 - 1 = d'_0 + d''_0). \quad (6)$$

Если $\{c_k\}$ обозначает некоторую ограниченную последовательность натуральных чисел и $\beta_k = [0; b_1, b_2, \dots, b_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \dots]$, то, очевидно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \beta. \quad (7)$$

Из неполных частных b_k числа β построим число (непрерывную дробь) $\alpha \in M(N)$ по следующему способу: $a_{k_n} = N$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), а d_n числа $a_{k_n+1}, a_{k_n+2}, \dots, a_{k_{n+1}-1}$ между a_{k_n} и $a_{k_{n+1}}$ пусть совпадают с числами $b_1, b_2, \dots, b_{d'_n}, b_{d'_n}, b_{d''_n-1}, \dots, b_1$ в этой же последовательности, т. е.

$$\alpha = [0; b_1, b_2, \dots, b_{d'_0}, b_{d'_0}, \dots, b_1, N, b_1, b_2, \dots, b_{d'_1}, b_{d'_1}, \dots, b_1, N, \dots] = \\ = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots].$$

Из (2) очевидно, что если $k \in \{k_n\}$, то

$$\frac{1}{r_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}} = \frac{1}{[a_k; a_{k+1}, \dots] + [0; a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1]} > \frac{1}{N},$$

так как $a_k \leq N-2$.

На основании этого неравенства из (1), (5), (6) и (7) получаем

$$L(\alpha) = \lim \frac{1}{N + [0; b_1, b_2, \dots, b_{d'_n}, b_{d'_n}, \dots] + [0; b_1, \dots, b_{d''_{n-1}}, b_{d''_{n-1}}, \dots, b_1]} = \\ = \frac{1}{N + 2\beta}. \quad (8)$$

Здесь β пробегает множество $\overline{M}(N-2)$ мощности континуума, в силу чего правая часть равенства (8) также пробегает некоторое множество $\overline{E}(N-2)$ мощности континуума. Но на основании этого же равенства (8) множество $\overline{E}(N-2)$ является множеством значений функции $L(\alpha)$ при $\alpha \in M(N)$, т. е. $\overline{E}(N-2) \subset M_L(N)$, откуда и $M_L(N)$ имеет мощность континуума.

2. $N = 3$. Пусть D обозначает множество всех чисел $\beta \in M(2)$ вида

$$\beta = [0; \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m_1}, \underbrace{2, 2, 1, \dots, 1}_{m_2}, \underbrace{2, 2, 1, \dots, 1}_{m_3}, 2, 2, \dots]. \quad (9)$$

Очевидно, D имеет мощность континуума.

Из неполных частных b_k числа β построим число $\alpha \in M(3)$ по следующему способу:

$$\alpha = [0; b_1, b_2, \dots, b_{l_1}, b_{l_1}, \dots, b_1, 3, b_1, b_2, \dots, b_{l_2}, b_{l_2}, \dots, b_1, 3, \dots], \quad (10)$$

где $\{l_n\}$ — последовательность индексов последних единиц всех групп единиц в разложении (9).

На основании (1) и (10), как и раньше, получаем:

$$L(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + [0; b_1, b_2, \dots, b_{l_{n+1}}, b_{l_{n+1}+1}, \dots] + [0; b_1, b_2, \dots, b_{l_n}, b_{l_n}+1, \dots, b_1]} = \frac{1}{3 + 2\beta}.$$

Из этого равенства, как и при $N \geq 4$, вытекает справедливость утверждения теоремы при $N = 3$.

3. $N = 2$. Пусть $D_1 \subset M(2)$ обозначает множество всех чисел $\beta = [0; 2, 2, 2, 2, 2, b_6, b_7, \dots, b_k, \dots]$, разложения которых удовлетворяют условиям: а) $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1$, б) число двоек между группами единиц в по-

следовательности $\{b_k\}$ не меньше пяти. D_1 имеет мощность континуума. Из чисел b_k строим число

$$\alpha = [0; b_1, b_2, \dots, b_{l_1}, b_{l_1+1}, \dots, b_1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, b_1, b_2, \dots, \dots, b_{l_2}, b_{l_2+1}, \dots, b_1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots] = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots], \quad (11)$$

где $\{l_n\}$ обозначает последовательность индексов последних двоек всех групп двоек в последовательности $\{b_k\}$.

Рассуждения, аналогичные предыдущим, дают

$$L(\alpha) = \frac{1}{2 + 2 \cdot [0; 1, 2, 1, \beta]} = \frac{4\beta + 3}{14\beta + 10}.$$

Из этого равенства, как и раньше, получается справедливость утверждения теоремы при $N = 2$.

На основании формулы (8), полученной при доказательстве теоремы 1, и известных неравенств V. Jarnik'a ((1), стр. 49) мы установили справедливость следующего предложения.

Теорема 2. *Размерность Хаусдорфа множества M_L всех чисел Маркова равна 1, т. е. $\dim M_L = 1$.*

Пусть P обозначает множество всех точек сгущения множества M_L , а $\gamma = \sup P$. Очевидно, что γ обладает свойствами: а) правее γ существует лишь счетное множество чисел Маркова; б) при любом $\varepsilon > 0$ интервал $(\gamma - \varepsilon, \gamma)$ содержит множество чисел Маркова мощности континуума.

Теорема 3. $\gamma = 1/3$.

Доказательство. Пусть

$$U_{m,l}(x, y) = 2 + [0; \underbrace{1, \dots, 1}_m, x] + \frac{1}{2 + [0; \underbrace{1, \dots, 1}_l, y]},$$

$$V_{m,l}(x, y) = 2 + [0; \underbrace{1, \dots, 1}_{2m-1}, x] + \frac{1}{2 + [0; \underbrace{1, \dots, 1}_{2l}, y]}.$$

Так как

$$2 + \alpha_0 + \frac{1}{2 + \alpha_0} = 3,$$

где $\alpha_0 = [0; 1, 1, \dots] = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, то очевидно, что $U_{m,l}(x, y)$ и $V_{m,l}(x, y)$ стремятся к 3 при $m \rightarrow \infty$, $l \rightarrow \infty$ равномерно относительно x и y .

Очевидно, при $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$

$$V_{m,l}(1, 1) \leq V_{m,l}(x, y) \leq V_{m,l}(2, 2).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число; тогда при $m > N(\varepsilon)$, $l > N(\varepsilon)$, $x \geq 1$, $y \geq 1$ будем иметь

$$3 < V_{m,l}(1, 1) \leq V_{m,l}(x, y) \leq 3 + \varepsilon. \quad (12)$$

Пусть $m_0 > N(\varepsilon)$, $l_0 > N(\varepsilon)$ и рассмотрим конечную последовательность

$$2, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{2m_0-1}, 2, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{2l_0}, 2, 2.$$

Из (12) при $1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$ имеем

$$3 < V_{m_0, l_0}(1, 1) \leq V_{m_0, l_0}(x, y) \leq V_{m_0, l_0}(2, 2) \leq 3 + \varepsilon. \quad (13)$$

Ввиду равномерной сходимости $U_{m,l}(x, y)$ к 3 существует число $N_1(m_0, l_0) = N_1(\varepsilon)$ такое, что если $m > N_1(\varepsilon)$, $l > N_1(\varepsilon)$, то

$$U_{m,l}(x, y) < V_{m_0, l_0}(1, 1). \quad (14)$$

Теперь рассмотрим множество $D_2 \subset M(2)$ чисел

$$\beta = [0; \underbrace{1, \dots, 1}_{m_1}, 2, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_2}, 2, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{m_3}, 2, 2, \dots] = [0; b_1, b_2, b_3, \dots],$$

где $m_k > N_1$ ($k = 1, 2, \dots$). D_2 , очевидно, имеет мощность континуума.

Из чисел b_k построим число

$$\alpha = [0; b_1, b_2, \dots, b_{l_1}, b_{l_1+1}, \dots, b_1, 2, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{2m_0-1}, 2, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{2l_0}, 2, 2, b_1, b_2, \dots], \quad (15)$$

где $\{l_k\}$ — последовательность индексов последних единиц всех групп единиц в последовательности $\{b_k\}$.

Из (1), (13), (14) и (15) имеем

$$L(\alpha) = \frac{a\beta^2 + b\beta + c}{a_1\beta^2 + b_1\beta + c_1}, \quad (16)$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 — некоторые целые числа, не зависящие от β .

Из (12), (13) и (15) получаем

$$\frac{1}{3 + \varepsilon} < L(\alpha) < \frac{1}{3}.$$

Это неравенство, если рассуждать как при доказательстве теоремы 1, приводит к выводу, что $(1/3 - \varepsilon, 1/3)$ при любом $\varepsilon > 0$ содержит континуум чисел Маркова. Это предположение в соединении с известной теоремой Маркова (¹, стр. 32) и доказывает теорему.

Тбилисский государственный университет
им. И. В. Сталина

Поступило
8 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ F. K o k s m a, Diophantische Approximationen, 1936. ² А. Я. Х и н ч и н, Цепные дроби, 1949.