Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

В. П. ИЛЬИН

ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ПРОИЗВОДНЫЕ, СУММИРУЕМЫЕ С ДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ, НА ГИПЕРПЛОСКОСТЯХ РАЗЛИЧНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 III 1951)

В пространстве n измерений $x_1, \ldots, x_n$ рассмотрим ограниченную область D с контуром Г. Пусть в этой области задана некоторая суммируемая функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая обобщенные производные (по С. Л. Соболеву [1,2]) до порядка l, суммируемые с некоторой степенью $p \geqslant 1$.

При некоторых весьма общих предположениях относительно области D С. Л. Соболевым [1-3] и В. И. Кондрашовым [4] получены оценки для таких функций, причем равномерные оценки получаются в том случае, если $lp > n$, и оценки «в среднем» с некоторой степенью q^* по достаточно гладким многообразиям размерностей s, если $lp \leqslant n$ и $s > n - lp$ при $q^* < \frac{sp}{n - lp}$. При изучении некоторых вопросов оказывается полезным иметь при дополнительных ограничениях, налагаемых на функцию и область D, оценки как равномерные, так и «в среднем» на гиперплоскостях размерностей $\leqslant n - lp$ для случая, когда $lp \leqslant n$.

Для $n = 2$, $l = 1$, $p = 2$ такого рода оценки получены Л. В. Канторовичем [5,6] и применены им для установления равномерной сходимости метода Ритца и метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям в задаче Дирихле. В настоящей заметке при предположениях, аналогичных тем, которые были сделаны Л. В. Канторовичем [5,6], мы указываем такого же рода оценки для общего случая.

В дальнейшем будем обозначать через D_k произвольное сечение области D плоскостью $x_{k+1} = \text{const}, \ldots, x_n = \text{const}$.

Относительно области D будем предполагать, что она такова, что каждая ее точка достижима с помощью двух шаровых секторов постоянного радиуса и постоянной формы — одного n-мерного, целиком содержащегося в области D, а другого k-мерного, содержащегося в сечении D_k, проходящем через эту точку. То обстоятельство, что D обладает указанным свойством, будем записывать $D \in C^{n,k}$. Если через H и $\mathcal{H}$ обозначить величины допустимых радиусов соответственно n-мерного и k-мерного секторов, достигающих каждую точку области D, то класс областей с данными допустимыми радиусами будем обозначать $C^{n,k}_{H,\mathcal{H}}$.

Мы сформулируем теперь предложения для функций, имеющих непрерывные производные.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, непрерывная в замкнутой области $\overline{D} = D + \Gamma$, все производные которой до порядка l непрерывны внутри D, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$1)\ \overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} \left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^p dx_1 \ldots dx_n \leqslant A^p \text{ для } \alpha = 0, l; \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha; \quad p > 1; \tag{1}$$

2) *все производные данного порядка m $(m \leqslant l)$ по переменным $x_1, \ldots, x_s$, $x_{s+1}, \ldots, x_k$, где $k \geqslant s$ и $k > n - lp$, суммируемы со степенью $q > 1$ по каждому сечению D_s: $x_{s+1} = \mathrm{const}, \ldots, x_n = \mathrm{const}$ (k и s — фиксированные числа $\leqslant n$) и имеют место неравенства:*

$$\overbrace{\int \cdots \int_{D_s}}^{s} \left| \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_k^{\alpha_k}} \right|^q dx_1 \ldots dx_s \leqslant L^q, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = m \tag{2}$$

для всех указанных производных m-го порядка при любом выборе D_s.

Пусть, кроме того, выполнены условия:

3) $mq > s$;

4) $D \in C^{n,k}_{H,\mathscr{H}}$.

Тогда в каждой точке области $\overline{D}$ имеют место оценки:

$$|\varphi(M)| \leqslant C_1 \left(A^{m - \frac{s}{q}} L^{\frac{n}{p} - l} \right)^{\frac{1}{m - \frac{s}{q} + \frac{n}{p} - l}}, \quad \text{если } lp < n; \tag{3}$$

$$|\varphi(M)| \leqslant C_2 \left(A^{m - \frac{s}{q}} L^{\frac{n}{p^*}} \right)^{\frac{1}{m - \frac{s}{q} + \frac{n}{p^*}}} + C_3 A, \quad \text{если } lp = n. \tag{4}$$

Здесь за p^* можно взять любое положительное число такое, что $p^* \geqslant p$. Постоянные C_i не зависят от функции φ, а зависят лишь от вида области D и чисел m, l, n, p, q, s, k, p^*.

При этом предполагается, что L выбрано в (2) настолько большим, что

$$\left(\frac{A}{L} \right)^{\frac{1}{m - \frac{s}{q} + \frac{n}{p} - l}} \leqslant \min(H, \mathscr{H}) \quad \text{при } lp < n;$$

$$\left(\frac{A}{L} \right)^{\frac{1}{m - \frac{s}{q} + \frac{n}{p^*}}} \leqslant \min(H, \mathscr{H}) \quad \text{при } lp = n.$$

Следствие 1. Если $lp > n$, то, приняв $s = n$, $m = l$, $q = p$, $L = A$, мы получим известную оценку С. Л. Соболева

$$|\varphi(M)| \leqslant \overline{C} A.$$

Следствие 2. В условиях теоремы для производных функции φ по переменным $x_1, \ldots, x_k$ порядка r, где r — любое из чисел $1, 2, \ldots$ $\ldots, \min\left\{ m - \left[\frac{s}{q}\right] - 1,\ l - \left[\frac{n-k}{p}\right] - 1 \right\}$, в области D имеют место оценки:

$$\left| \frac{\partial^r \varphi}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_k^{r_k}} \right| \leqslant C \left(A^{m - r - \frac{s}{q}} L^{\frac{n}{p} + r - l} \right)^{\frac{1}{m - \frac{s}{q} + \frac{n}{p} - l}}.$$

Действительно, при таких r выполнены все условия теоремы, где только m заменено на $m-r$, а l на $l-r$.

Замечание 1. Условие 2) можно было бы несколько ослабить. Достаточно требовать, чтобы для каждой производной порядка m существовало свое семейство s-мерных сечений, причем выполнены остальные требования условия 2).

Замечание 2. Если условие 2) выполнено по отношению ко всем производным порядка m, то условие 4) можно заменить на $D \in C_H^n$.

Замечание 3. Если условие 2) выполняется лишь для некоторых сечений D_k, то заключение остается справедливым для точек этих сечений.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1 функция φ имеет непрерывные производные до порядка $l-1$ в $\overline{D}=D+\Gamma$ и на границе Γ сама функция φ и указанные производные равны нулю.*

Тогда оценку (4) *можно заменить следующей оценкой*:

$$|\varphi(M)| \leqslant \widetilde{C}A + \widetilde{\widetilde{C}}A\left(\ln\frac{d^{m-\frac{s}{q}}L}{A}\right)^{1/p'} \qquad (lp=n). \tag{5}$$

Здесь d — диаметр области D, а $\widetilde{C}$ и $\widetilde{\widetilde{C}}$ — постоянные, не зависящие от φ.

Теорема 3. *Пусть функция φ и область D удовлетворяют всем условиям теоремы 1, за исключением условия 3), которое заменяется следующим: 3′) $mq \leqslant s$.*

Пусть D_t есть сечение области D t-мерной гиперплоскостью содержащееся в $\overline{D}_s=(D+\Gamma)_s$, и пусть $t>s-mq$.

Тогда для любого q^* такого, что $q \leqslant q^* < \frac{tq}{s-mq}$, справедлива оценка:

$$\left[\overbrace{\int\cdots\int_{D_t}}^{t} |\varphi(M)|^{q^*}\, dV_{\overrightarrow{M}}\right]^{\frac{1}{q^*}} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(1+|D_t|^{\frac{1}{q^*}}\right)\left(A^{m-\frac{s}{q}+\frac{t}{q^*}}L^{\frac{n}{p}-l}\right)^{\frac{1}{\frac{n}{p}-l+m-\frac{s}{q}+\frac{t}{q^*}}},$$

где постоянная C зависит лишь от вида области D, но не зависит от φ, а $|D_t|$ обозначает t-мерную меру сечения D_t.

Заметим, что L берется таким, чтобы

$$\left(\frac{A}{L}\right)^{\frac{1}{\frac{n}{p}-l+m-\frac{s}{q}+\frac{t}{q^*}}} \leqslant \min(H, \mathscr{H}).$$

Замечание. Теорема сформулирована для плоских t-мерных многообразий, но она распространяется и на достаточно гладкие неплоские многообразия t измерений, содержащиеся в каком-либо сечении D_s.

Основным методом получения оценок является метод С. Л. Соболева, по которому значение функции в вершине некоторого сектора представляется через значения ее производных внутри этого сектора. При этом весьма полезным в нашем случае оказалось также применение идеи Л. В. Канторовича о последовательном использовании секторов различных размерностей.

Точнее говоря, значение функции в некоторой точке $P \in D$ мы представляли через значения функции и ее производных m-го порядка внутри k-мерного сектора V_k, лежащего в D_k. Затем значение функции в каждой точке $M \in V_k$ снова представляли через значения функции и ее l-х производных внутри n-мерного сектора.

Отметим еще, что существенным в наших оценках являлось использование величины h радиуса достигающих n-мерного и k-мерного секторов.

Нетрудно распространить полученные результаты и на функции, имеющие обобщенные производные и удовлетворяющие условиям 1), 2), 3) приведенных теорем.

Поступило
21 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Матем. сборн., 4 (46), № 3 (1938). [2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, изд. ЛГУ, 1950. [3] С. Л. Соболев, Матем. сборн., 2 (44), 3, 465 (1937). [4] В. И. Кондрашов, ДАН, 18, № 2 (1938). [5] Л. В. Канторович, ДАН, 30, 579 (1941). [6] Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, 1949.