Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

И. Ц. ГОХБЕРГ

О ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ, АНАЛИТИЧЕСКИ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 IV 1951)

1. Пусть A_λ — линейный оператор, определенный в R для всех точек λ некоторой области комплексной плоскости, и пусть A_λ есть голоморфная функция от λ.

Назовем областью Фредгольма оператора A_λ множество Φ_{A_λ} всех значений λ комплексной плоскости, для которых оператор $T_\lambda = E - A_\lambda$ представим в виде суммы обратимого и вполне непрерывного, или, что все равно, конечномерного операторов. Определение области Фредгольма для операторов $A_\lambda = \lambda A$ введено С. М. Никольским (1).

Как и в случае $A_\lambda = \lambda A$ (1), нетрудно установить, что Φ_{A_λ} есть открытое множество (это следует из того, что при малых $|\lambda - \lambda_0|$ имеет место неравенство $\| A_\lambda - A_{\lambda_0} \| < K |\lambda - \lambda_0|$, где K — положительная постоянная). Область Φ_{A_λ}, как открытое множество, представляет собой сумму конечного или счетного числа компонент: $\Phi_{A_\lambda} = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i$.

Теорема 1. *В каждой компоненте Φ_i существует изолированное множество F_i $(i = 1, 2, \ldots)$ такое, что для всех точек λ из множества $\Phi_i - F_i$ уравнение $(E - A_\lambda) x = 0$ имеет одинаковое число решений. Для $x \in F_i$ уравнение $(E - A_\lambda) x = 0$ имеет больше решений, чем для $x \in \Phi_i - F_i$.*

Эта теорема для случая $A_\lambda = \lambda A$ и если в Φ_i существует λ такая, что $E - \lambda A$ обратим, доказана С. М. Никольским.

Для интегральных уравнений с ядром, зависящим аналитически от параметра, аналогичная теорема доказана Жиро (2).

Доказательство. Пусть n — наименьшее число решений уравнения

$$x - A_\lambda x = 0 \tag{1}$$

при $\lambda \in \Phi_{i_0}$, где Φ_{i_0} — определенная связная компонента, и пусть уравнение $x - A_{\lambda_1} x = 0$ имеет точно n линейно независимых решений.

Обозначим через F_{i_0} множество λ, для которых уравнение (1) имеет больше n решений.

Возьмем произвольное λ_0, принадлежащее множеству F_{i_0}, и покажем, что оно изолировано. Соединим точки λ_0 и λ_1 кривой C, полностью принадлежащей множеству Φ_{i_0}, и, наконец, пусть λ' — произвольная точка кривой C.

Оператор $A_{\lambda'}$ можно представить в виде суммы двух операторов: $A_{\lambda'}x = Ux + \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\, x_k$, где оператор $E - U$ обратим, $m \geqslant n$ и системы $\{x_k\}$, $\{f_k\}$ линейно независимы.

Уравнение (1) можно представить в виде

$$x - Ux - (A_\lambda - A_{\lambda'})\, x = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\, x_k. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что существует круг σ' с центром в точке λ', для всех точек которого оператор $E - U - (A_\lambda - A_{\lambda'})$ обратим и, значит, оператор $U - (A_\lambda - A_{\lambda'})$ имеет аналитическую резольвенту U_λ, т. е. $(E + U_\lambda)(E - U - (A_\lambda - A_{\lambda'})) = (E - U - (A_\lambda - A_{\lambda'}))(E + U_\lambda) = E$.

Подвергая обе части (2) воздействию оператора $E + U_\lambda$, получим

$$x = \sum_{k=1}^{m} a_k (x_k + U_\lambda x_k), \tag{3}$$

где

$$a_k = f_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Подставляя (3) в (4), получим однородную систему m линейных уравнений с m неизвестными a_i:

$$a_i - \sum_{k=1}^{m} a_k f_i (x_k + U_\lambda x_k) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

эквивалентную в силу (3) и (4) уравнению (1).

Детерминант этой системы имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \| \delta_{ij} - \alpha_{ij} \|_{\substack{i=1,2,\ldots,m,\\ j=1,2,\ldots,m}} \tag{5}$$

где $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\alpha_{ij} = f_i(x_j + U_\lambda x_j)$.

Если в круге σ' имеется точка λ^*, для которой уравнение $x - A_\lambda x = 0$ имеет n линейно независимых решений, то наибольший порядок минора детерминанта (5), отличного от нуля хоть в этой точке λ^*, равен $m - n$. Пусть главный минор $\Delta_1(\lambda)$ порядка $m - n$ не обращается в точке λ^* в нуль.

Из аналитичности $\Delta_1(\lambda)$ в σ' и $\Delta_1(\lambda^*) \neq 0$ следует, что $\Delta_1(\lambda)$ отличен от нуля всюду в σ' за исключением изолированного множества точек.

Значит, если в σ' существует точка, для которой уравнение (1) имеет n линейно независимых решений, то и во всем круге σ', за исключением изолированного множества точек λ, уравнение (1) имеет n линейно независимых решений.

Покрывая теперь все точки кривой C соответствующими кругами σ и применяя к этому покрытию лемму Лебега — Бореля, получим конечное число кругов σ, покрывающих C и таких, что два соседних из них пересекаются. Учитывая то, что в круге σ_1 с центром в точке λ_1 уравнение (1) имеет n решений, получаем изолированность точки λ_0. Этим завершается доказательство теоремы.

2. Рассмотрим оператор $A_\lambda = E - \lambda U$, где U — ограниченный оператор, определенный в R.

Назовем областью Нетера оператора U множество N_u всех значений λ комплексной плоскости, для каждого из которых оператор A_λ представим в виде суммы двух операторов

$$A_\lambda = D + T,$$

где D имеет обратный слева и уравнение $\overline{D}X = 0$ имеет конечное число решений, либо D имеет обратный справа и уравнение $DX = 0$ имеет конечное число решений, T — вполне непрерывный оператор.

Область N_u характеризуется тем, что для всех $\lambda \in N_u$ и только для них операторы A_λ и $\overline{A}_\lambda$ удовлетворяют свойствам Нетера ([3]):

I. Уравнения $A_\lambda X = 0$ и $\overline{A}_\lambda X = 0$ имеют конечное число решений.

II. Операторы A_λ и $\overline{A}_\lambda X = 0$ нормально разрешимы.

III. Разность между числом решений уравнений $A_\lambda x = 0$ и $\overline{A}_\lambda X = 0$ не меняется от прибавления к A вполне непрерывного оператора. Нетрудно установить, что N_u есть открытое множество. Значит, область N_u представляет собой сумму конечного или счетного числа связных компонент N_i:

$$N_u = \sum_{i=1}^{\infty} N_i.$$

Определение. Назовем индексом $\varkappa(A_\lambda)$ оператора A_λ разность между числами решений однородных уравнений $A_\lambda x = 0$ и $\overline{A}_\lambda X = 0$.

Теорема 2. *Индекс $\varkappa(A_\lambda)$ оператора A_λ есть величина постоянная для данной связной компоненты $N_{i_0} \in N_u$ (т. е. для всех $\lambda \in N_{i_0}$ $\varkappa(A_\lambda) = \mathrm{const}$).*

Обозначим $\varkappa(A_{\lambda_0}) = k$. Пусть $k \leqslant 0$ и пусть λ — произвольная точка из N_i.

Соединим точку λ с точкой λ_0 кривой C, содержащейся в N_{i_0}. Для любой $\lambda_1 \in C$ существует окрестность (круговая), в которой индекс $\varkappa(A_\lambda) = \varkappa(A_{\lambda_1})$. Действительно, пусть $\lambda_1 \in C$, тогда $E + \lambda_1 U = D + T$ ([3]). Для малых значений $|\lambda - \lambda_1|$ из того, что $\varkappa(BD + T) = \varkappa(D + T)$, получаем $\varkappa(A_{\lambda_1}) = \varkappa(A_\lambda)$. Окружая теперь все точки кривой C соответствующими окрестностями и применяя к этому покрытию лемму Лебега — Бореля, получим конечное число интервалов, покрывающих C, таких, что на каждом интервале индекс постоянен и два соседних из них пересекаются.

Доказательство теоремы завершается, если вспомнить, что в интервале, содержащем точку λ_0, индекс оператора A_{λ_0} равен k.

Аналогично можно доказать теорему для случая $k > 0$.

Следствие. Если область Фредгольма оператора Φ_u не есть вся плоскость, то существуют λ, не принадлежащие области Нетера N_u.

Действительно, граница области Фредгольма не принадлежит области Нетера.

Теорема 3. *В каждой компоненте N_i существует изолированное множество M_i такое, что для всех $\lambda \in N_i - M_i$ уравнение $A_\lambda X = 0$ имеет одинаковое число решений, а для всех $\lambda \in M_i$ уравнение $A_\lambda x = 0$ имеет больше решений, чем для $\lambda \in N_i - M_i$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in N_{i_0}$ и пусть $\varkappa(A_{\lambda_0}) \geqslant 0$, тогда $E - \lambda_0 U = D + T$, где D — обратимый справа оператор ([3]) и T — вполне непрерывный. Пусть $D^{-1} = E - U_1$. Оператор D^{-1} такой, что уравнение $\overline{D}^{-1} X = 0$, имеет $\varkappa(A_{\lambda_0})$ решений.

Для всех $\lambda \in N_{i_0}$ оператор $E - \lambda U$ представим в виде суммы двух операторов: $E - \lambda U = D_\lambda + T_\lambda$ (D_λ обратим справа).

Оператор $D^{-1} D_\lambda$ для всех $\lambda \in N_{i_0}$ удовлетворяет свойству $D^{-1} D_\lambda = B_\lambda + T'_\lambda$, где B_λ — обратимый оператор и T'_λ — вполне непрерывный. В самом деле, уравнения $D^{-1} D_\lambda x = 0$, $\overline{D_\lambda D^{-1}} X = 0$ имеют по $\varkappa(A_\lambda)$ решений. Оператор $D^{-1} D_\lambda$ нормально разрешим, ибо образ оператора D_λ есть все пространство R, а образ оператора D^{-1} замкнут.

Значит, для всех $\lambda \in N_{i_0}$

$$(E-U_1)(E-\lambda U) = E-(U_1+\lambda U-\lambda U_1 U) = B'_\lambda + T'_\lambda,$$

где B'_λ — обратимый оператор и T'_λ — вполне непрерывный.

Таким образом, N_{i_0} принадлежит области Фредгольма для оператора P_λ, где $P_\lambda = U_1 + \lambda U - \lambda U_1 U$, и, больше того, N_{i_0} принадлежит одной связной компоненте.

На основании теоремы 1 и того факта, что уравнение $(E-U_1)x=0$ имеет единственное нулевое решение, получаем доказательство теоремы.

Следствие. Если существует в компоненте N_{i_0} такое λ_0, что оператор $E-\lambda_0 U$ обратим справа, то оператор $E-\lambda U$ обратим справа для всех $\lambda \in N_{i_0}$, за исключением изолированного множества $M_{i_0} \in N_{i_0}$.

Заметим, что все свойства, доказанные для компоненты с положительным индексом, без труда переносятся для компонент с отрицательным индексом.

В заключение заметим еще, что все утверждения п. 2 можно естественно распространить на операторы вида $A_\lambda = E - U_\lambda$, где U_λ зависит аналитически от λ.

Поступило
15 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, Изв. АН СССР, сер. матем., 7, № 3 (1943). [2] G. Giraud, Ann. Sc. de l'Ecole Norm. sup., sér. 3, 56 (1939). [3] И. Ц. Гохберг, ДАН, 76, № 4 (1951).