Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

И. И. ГОРДОН

КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ ЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНУЮ ПЛОСКОСТЬ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 IV 1951)

Настоящая заметка посвящена решению задачи о гомотопической классификации отображений замкнутых поверхностей в проективную плоскость при помощи методов, изложенных в моей заметке ([1]). Указанная задача является частным случаем более общей задачи, рассматривавшейся Хсян-лин Ши ([2]). Однако Хсян-лин Ши пользуется существенно другими методами и более сложным аппаратом, и результаты настоящей заметки из его работы непосредственно не получаются.

А. Пусть K^n — конечный комплекс, Φ — его фундаментальная группа, Φ_0 — подгруппа индекса 2 группы Φ.

Будем рассматривать Φ как группу симплициальных путей комплекса K^n, выходящих из вершины O. Отнесем каждой вершине T_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, \alpha^0)$ комплекса K^n произвольный, но фиксированный симплициальный путь s_i, соединяющий O с T_i^0. Пусть T_j^1 — одномерный симплекс комплекса K^n, имеющий вершинами T_α^0 и T_β^0. Положим, что $u(T_j^1)$ есть вычет по модулю 2, равный 0, если класс путей, содержащий путь $s_\alpha T_j^1 s_\beta^{-1}$, принадлежит подгруппе Φ_0, и равный 1 в противном случае. Мы получаем, таким образом, одномерную цепь u^1 по модулю 2. Нетрудно показать, что эта цепь является ∇-циклом комплекса K^n, что определяемый этим циклом одномерный класс ∇-гомологий U^1 не зависит от выбора вспомогательных путей s_i и что класс U^1 не является нулевым классом. Таким образом, каждой подгруппе Φ_0 индекса 2 группы Φ ставится в соответствие ненулевой элемент группы $B_\nabla^1(K^n)$ одномерных ∇-гомологий по модулю 2. Можно доказать, что это соответствие является взаимно-однозначным. Отсюда следует, что число различных подгрупп индекса 2 группы Φ равно числу ненулевых элементов группы $B_\nabla^1(K^n)$.

Б. Пусть M^2 — замкнутая поверхность, Φ — ее фундаментальная группа, P^2 — проективная плоскость.

В силу теоремы 1 заметки ([1]) для решения задачи о классификации отображений M^2 в P^2 необходимо прежде всего найти все подгруппы индекса 2 группы Φ. Это нетрудно сделать, использу сформулированный в п. А результат. Я ограничусь рассмотрением неориентируемых поверхностей, дл ориентируемых применимы аналогичные рассуждения.

Пусть M^2 — замкнутая неориентируемая поверхность рода p (сфера с p пленками Мебиуса, $p \geqslant 1$). Будем считать, что M^2 задана каноническим многоугольником V типа $c_1 c'_1 c_2 c'_2 \cdots c_p c'_p$ [3] и получается из него отождествлением ребер c_i и c'_i. Как известно, фундаментальная группа такой поверхности представляет собой группу с p образующими $C_1, C_2, \ldots, C_p$, связанными соотношением $C_1^2 C_2^2 \ldots C_p^2 = 1$. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_l$ — l различных чисел из совокупности $1, 2, \ldots, p$ $(1 \leqslant l \leqslant p)$. Рассмотрим совокупность $\Phi_0(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ всех элементов группы Φ, записываемых в виде слов, составленных из образующих $C_1, C_2, \ldots, C_p$, в которых сумма показателей при образующих $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_l}$ есть четное число. Нетрудно видеть, что $\Phi_0(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ представляет собой подгруппу индекса 2 группы Φ. При фиксированном l число таких подгрупп равно C_p^l, следовательно, общее их число $\sum\limits_{l=1}^{p} C_p^l = 2^p - 1$. Очевидно, все эти подгруппы различны. Принимая теперь во внимание, что группа $B_\nabla^1(M^2)$ содержит, как известно, 2^p элементов, и применяя результат п. А, мы видим, что подгруппами $\Phi_0(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ исчерпываются все подгруппы индекса 2 группы Φ.

В. Определим теперь все двулистные накрытия поверхности M^2. Рассмотрим два многоугольника: V_1 с границей $a_1 a'_1 \cdots a_p a'_p$ и V_2 с границей $b_1 b'_1 \ldots b_p b'_p$, конгруентных многоугольнику V (при этом мы считаем, что при естественном отображении, определяемом конгруентностью, ребра a_i и b_i соответствуют ребру c_i, а a'_i и b'_i — ребру c'_i). Произведем следующие отождествления: отождествим a_j с a'_j и b_j с b'_j для всех j, не совпадающих ни с одним из чисел $i_1, i_2, \ldots, i_l$. a_{i_s} отождествим с b'_{i_s} и a'_{i_s} отождествим с b_{i_s} $(s = 1, 2, \ldots, l)$. В результате такого отождествления получается полиэдр L^2. Естественные отображения V_1 и V_2 на V индуцируют отображение ψ полиэдра L^2 на M^2. Нетрудно убедиться, что прообраз каждой точки поверхности M^2 при отображении ψ состоит из двух точек и что отображение ψ является локально-гомеоморфным. Поэтому L^2 представляет собой двулистное накрытие поверхности M^2. Если $l < p$, то L^2 есть неориентируемая поверхность рода $2p-2$. Если же $l = p$, то L^2 есть ориентируемая поверхность рода $p-1$ (сфера с $p-1$ ручкой).

Как известно, между двулистными накрытиями любого полиэдра и подгруппами его фундаментальной группы индекса 2 существует естественное взаимно-однозначное соответствие. Нетрудно показать, что построенному нами накрытию L^2 соответствует при этом подгруппа $\Phi_0(i_1, i_2, \ldots, i_l)$, определенная в п. Б. Таким образом, указанная конструкция дает нам все двулистные накрытия поверхности M^2.

Г. Переходим теперь к вопросу о классификации отображений. Будем обозначать непрерывное отображение f полиэдра P в полиэдр Q символом $f: P \to Q$. Будем говорить, что отображение $f: P \to Q$ удовлетворяет условию стягиваемости, если каждый замкнутый путь из P переводится посредством f в путь, гомотопный нулю в Q.

Пусть $f: M^2 \to P^2$, Σ^2 — накрывающая сфера для P^2, φ — естественное отображение (проекция) сферы Σ^2 на P^2. В случае, когда f удовлетворяет условию стягиваемости, мы будем называть накрывающим отображением для f отображение $\bar{f}: M^2 \to \Sigma^2$, удовлетворяющее следующему условию: какова бы ни была точка $x \in M^2$, $\varphi \bar{f}(x) = f(x)$. Для всякого f, удовлетворяющего условию стягиваемости, существует в точности два накрывающих отображения.

Если отображение f не удовлетворяет условию стягиваемости, то оно определяет подгруппу $\Phi_0(f)$ индекса 2 фундаментальной группы Φ поверхности M^2 (см. [1]). Если Φ_0 есть какая-нибудь подгруппа индекса 2 группы Φ, то мы будем называть все отображения $f: M^2 \to P^2$, для которых $\Phi_0(f)=\Phi_0$, отображениями, соответствующими подгруппе Φ_0. Отображения, соответствующие различным подгруппам группы Φ, принадлежат различным гомотопическим классам. Для отображений, не удовлетворяющих условию стягиваемости, понятие «накрывающее отображение» определено в заметке ([1]).

Классификационная теорема. 1. *Пусть M^2 — ориентируемая поверхность рода p $(p\geqslant 0)$.*

а) *Существует счетное число гомотопических классов отображений M^2 в P^2, удовлетворяющих условию стягиваемости. Каждый такой класс однозначно определяется абсолютной величиной степени накрывающего отображения, причем совокупность всех этих степеней совпадает с совокупностью всех целых чисел.*

б) *Существует два класса отображений, соответствующих подгруппе Φ_0 индекса 2 группы Φ. Так как таких подгрупп имеется $2^{2p}-1$ (см. п. А), то общее число классов отображений, не удовлетворяющих условию стягиваемости, равно $2^{2p+1}-2$.*

2. *Пусть M^2 — неориентируемая поверхность рода p $(p\geqslant 1)$.*

а) *Существует два класса отображений, удовлетворяющих условию стягиваемости.*

б) *Если $\Phi_0=\Phi_0(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ и $l=p$, т. е. накрывающая L^2 ориентируема, то существует счетное число классов отображений, соответствующих подгруппе Φ_0. Каждый такой класс однозначно определяется абсолютной величиной степени накрывающего отображения. При этом совокупность всех степеней накрывающих отображений совпадает с совокупностью четных чисел при p четном и с совокупностью нечетных при p нечетном.*

в) *Если $\Phi_0=\Phi_0(i_1, i_2, \ldots, i_l)$ и $l<p$, т. е. накрывающая L^2 неориентируема, то при l нечетном существует один гомотопический класс отображений, соответствующих подгруппе Φ_0, а при l четном — два класса. Общее число всех таких классов равно поэтому*

$$C_p^1+2C_p^2+C_p^3+2C_p^4+\cdots=\begin{cases}3(2^{p-1}-1) & \textit{при } p \textit{ нечетном},\\ 3(2^{p-1}-1)-1 & \textit{при } p \textit{ четном}.\end{cases}$$

Доказательство сформулированной теоремы получается из доказательств соответствующих утверждений заметки ([1]) при помощи применения результатов п. В настоящей заметки.

Д. Из утверждения в) второй части классификационной теоремы следует, что в случае, когда n четное, а K^n и L^n оба неориентируемы, число гомотопических классов отображений может быть равно, вообще говоря, как 1, так и 2. Таким образом получается ответ на неразобранный вопрос, указанный в конце заметки ([1]). Вместо него может быть поставлен вопрос об отыскании для неориентируемых многообразий M^n условий, при которых существует один класс отображений, и условий, при которых существует два класса (считая, что n любое четное большее 2, а L^n также неориентируемо).

Горьковский государственный университет

Поступило
30 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Гордон, ДАН, **65**, № 4 (1949). [2] Hsiang-Lin Shih, Duke Math. Journ., **10**, № 2, 179 (1943). [3] Г. Зейферт и В. Трельфалль, Топология, 1938, гл. VI.