Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

А. В. БИЦАДЗЕ

К ОБЩЕЙ ЗАДАЧЕ СМЕШАННОГО ТИПА

(Представлено академиком М. . Лаврентьевым 28 III 1951)

В работах [1, 2] был исследован ряд задач смешанного типа для уравнения

$$u_{xx} + \theta(y)\, u_{yy} = 0, \quad \theta(y) = 1 \text{ при } y > 0, \quad \theta(y) = -1 \text{ при } y < 0. \tag{1}$$

Целью настоящей заметки является изучение общей задачи смешанного типа для уравнения (1).

Пусть D — область, ограниченная: а) линией Жордана σ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, расположенной в полуплоскости $y > 0$; б) характеристикой $y = x - 1$ уравнения (1); в) линией L: $y = -\gamma(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, расположенной в характеристическом треугольнике ACB, где $C(^1/_2, -^1/_2)$, причем $\gamma(0) = 0$, $l + \gamma(l) = 1$.

Задача М. Требуется определить функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами: 1) $u(x, y)$ является решением уравнения (1) при $y \neq 0$; 2) она непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ и имеет первые производные, непрерывные в этой же области всюду, кроме, быть может, точек A и B, вблизи которых u_x и u_y могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы; 3) $u = \varphi$ на σ и $u = \psi$ на L, где φ и ψ — заданные функции, причем $\varphi(A) = \psi(A)$.

В случае, когда L совпадает с характеристикой L_1: $y = -x$, получается задача Т, которая всегда имеет единственное устойчивое решение [1, 2].

Для корректной постановки задачи М кривые σ и L нужно подчинять определенным ограничениям.

Теорема 1. *Если гладкие кривые σ: $x = x(s)$, $y = y(s)$ и L удовлетворяют условиям:*

$$y'_s(x - x^2 - y^2) - x'_s y \geqslant 0, \qquad \left|\frac{d\gamma}{x}\right| < 1, \qquad \frac{d\gamma}{dx} < \frac{\gamma}{x - x^2 + \gamma^2}, \tag{2}$$

функция $\varphi(s)$, где s — длина дуги σ, непрерывна в смысле Гельдера, а $\psi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то задача М не может иметь более одного решения.*

Условия (2) будут соблюдены, например, если линия L монотонна и вогнута относительно отрезка AB, а линия σ вогнута относительно AB и расположена в круге $|z| < 1$.

---

* Теорема 1 остается в силе и в тех случаях, когда L содержит отрезок характеристики L_1.

Справедливость утверждения теоремы следует из равенства $\int\limits_0^1 u(x, 0)\, v(x, 0)\, x(1-x)^{-1}\, dx = 0$, где u является решением однородной задачи М, а $v(x, y)$ гармонически сопряжена с $u(x, y)$ в эллиптической части области D, причем $v(0, 0) = 0$.

Теорема 2. *Если соблюдены условия теоремы* 1 *и, кроме того, кривая* L *содержит отрезок* AF *характеристики* L_1, *а в остальном отходит от* L_1, *но так, что целиком остается внутри характеристического прямоугольника* $FEGC$, *где* $F(^1/_2 h, -{}^1/_2 h)$, $E(h, 0)$, $G(^1/_2 h + {}^1/_2, {}^1/_2 h - {}^1/_2)$, $0 < h < 1$, *то задача* М *всегда имеет решение.*

Задача М в условиях теоремы 2 приводится к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода (ср. ([2])), разрешимость которого следует из теоремы 1.

Теорема 3. *Если* σ *совпадает с полуокружностью* σ_0: $x^2 + y^2 = x$, $y \geqslant 0$, *а* L — *с прямолинейным отрезком* L_0: $y = -\alpha x$, $0 < \alpha < 1$, *то задача* М *имеет решение.*

Не нарушая общности, можно предполагать, что $\varphi(A) = \psi(A) = \varphi(B) = 0$.

Общее решение уравнения (1) в гиперболической части области D, принимающее заданные значения ψ на L_0, представляется формулой

$$u(x, y) = f(x + y) - f[\lambda(x - y)] + \psi[(^1/_2 + {}^1/_2\lambda)(x - y)], \tag{3}$$

где $\lambda(1 + \alpha) = 1 - \alpha$, а $f(t)$, $0 < t < 1$, дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем $f(0) = 0$. Пусть $u = u_1 + u_2$, где u_1 и u_2 — решения (1), причем $u_1 = \varphi$ на σ_0, $u_1 = 0$ на L_0, $u_2 = 0$ на σ_0, $u_2 = \psi$ на L_0.

Рассмотрим функцию $F(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$, $F(0) = 0$, голоморфную в эллиптической части области D. В силу условий склеивания $u_1(x, +0) = u_1(x, -0)$, $u_{1y}(x, +0) = u_{1y}(x, -0)$, из (3) имеем, что $\operatorname{Im}(1 + i)[F(x) + iF(\lambda x)] = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Отсюда заключаем, что $F(z)$ аналитически продолжаема через AB в нижний полукруг $|z - {}^1/_2| < {}^1/_2$, причем $F(z) = -v_1(x, -y) - iu_1(x, -y) - 2\sum\limits_1 (-1)^n [v_1(\lambda^{2n}x, -\lambda^{2n}y) - u_1(\lambda^{2n-1}x, -\lambda^{2n-1}y) + iu_1(\lambda^{2n}x, -\lambda^{2n}y) + iv_1(\lambda^{2n-1}x, -\lambda^{2n-1}y)]$ при $y \leqslant 0$. Следовательно ([3]):

$$F(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma_0} \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t + z - 2tz}\right) \varphi(t)\, dt -$$

$$- \frac{2}{\pi i}\int\limits_{\sigma_0} \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}}\, \frac{\omega(\xi, \eta)\, dt}{t + z - 2tz}\,^{*}, \tag{4}$$

где $\omega(t) = \sum\limits_1 (-1)^n [u_1(\lambda^{2n}\xi, \lambda^{2n}\eta) + v_1(\lambda^{2n-1}\xi, \lambda^{2n-1}\eta)]$, $\quad t = \xi + i\eta$.

Далее обозначим через $\Phi(z)$, $\Phi(0) = 0$, функцию $u_2 + iv_2$, голоморфную в эллиптической части области D. В силу условий склеивания из (3) получаем $\operatorname{Re}(1 - i)[\Phi(x) + i\Phi(\lambda x)] = 2\psi[(^1/_2 + {}^1/_2\lambda)x]$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Так как $\Phi(z)$ аналитически продолжается через σ_0 на всю верхнюю полуплоскость, то мнимая часть $(1 - i)[\Phi(x) + i\Phi(\lambda x)]$, $-\infty < x \leqslant 0$, $1 \leqslant x < \infty$, выражается через ψ и через значения функций u_2 и v_2. На основании этого для определения $\Phi(z)$ получается функциональное уравнение ([3])

---

* В формулах (4) и (5) берется главная ветвь радикала.

$$\Phi(z) + i\Phi(\lambda z) = \frac{2}{\pi(1+i)} \int_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z-2tz} \right) \psi\left(\frac{1+\lambda}{2} t \right) dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi(1+i)} \int_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}} \frac{\omega(t)\, dt}{t+z-2tz}, \qquad (5)$$

где $\omega(t) = u_2(\lambda t, 0) - v_2(\lambda t, 0) + u_2[\lambda t / (2\lambda t - 2t + 1), 0] - v_2[\lambda t / (2\lambda t - - 2t + 1), 0]$ при $0 \leqslant t \leqslant 1/(2-\lambda)$, $\omega(t) = u_2(\lambda t, 0) - v_2(\lambda t, 0) - -u_2[\lambda t / (2t - 1), 0] - v_2[\lambda t / (2t-1), 0]$ при $1/(2-\lambda) \leqslant t \leqslant 1$.

Таким образом, определение функции $u(x, y)$ в эллиптической части области D приведено к определению функций $F(z)$ и $\Phi(z)$ из функциональных уравнений (4) и (5). Решения уравнений (4) и (5) получаются методом последовательных приближений. Построение функции $u(x, y)$ в гиперболической части области D трудности не представляет.

При $\lambda = 0$ из (4) и (5) непосредственно получается решение задачи Т в эллиптической части смешанной области.

Примечание 1. Приведенный здесь способ доказательства теоремы 3 применим и в тех случаях, когда линии σ и L отходят от σ_0 и L_0. Но тогда их нужно подчинять сильным ограничениям, что, очевидно, является недостатком способа.

Примечание 2. Весьма элементарно получается указанным способом решение задачи T_1 ([1], [2]): $u = \varphi$ на σ, $u = \psi_{2k}$ на $A_{2k}A_{2k+1}$, $u = \psi_{2k-1}$ на $B_{2k-1}B_{2k}$, где $A_k(^1/_2\, a_k, -^1/_2\, a_k)$, $B_k(^1/_2 a_k + ^1/_2, ^1/_2 a_k - ^1/_2)$, $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_{2j} < ^1/_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} = 1$.

В частности, когда σ совпадает с полуокружностью σ_0, решение получается в квадратурах. В самом деле, пусть $\varphi \equiv 0$ (что не нарушает общности) и рассмотрим функцию $\Phi(z) = u + iv$, $\Phi(0) = 0$, голоморфную в эллиптической части области D. Используя общее решение уравнения (1) и условия задачи, получаем:

$$\operatorname{Re}(1-i)\Phi(x) = 2\psi_{2k}(^1/_2\, x) + c_{2k}, \qquad a_{2k} \leqslant x \leqslant a_{2k+1};$$

$$\operatorname{Im}(1-i)\Phi(x) = -2\psi_{2k-1}(^1/_2 + ^1/_2\, x) + c_{2k-1}, \quad a_{2k+1} \leqslant x \leqslant a_{2k}; \qquad (6)$$

$$\operatorname{Im}(1-i)\Phi(x) = 2\psi_{2k}[^1/_2\, x / (2x-1)] + c_{2k},$$

$$-\infty < x \leqslant b_{2j},\ b_{2j+1} \leqslant x < \infty, \quad b_{2k+1} \leqslant x \leqslant b_{2k};$$

$$\operatorname{Re}(1-i)\Phi(x) = -2\psi_{2k-1}[^1/_2\, x / (2x-1) + ^1/_2] + c_{2k-1}, \qquad b_{2k} \leqslant x \leqslant b_{2k-1},$$

где $(2a_k - 1)\, b_k = a_k$, $c_0 = 0$, а c_k $(k = 1, 2 \ldots)$ — произвольные действительные постоянные. Таким образом, нам остается найти функцию $\Phi(z)$, голоморфную в верхней полуплоскости, ограниченную на бесконечности и вблизи точек a_k, b_k, по граничным условиям (6). Решение этой задачи, ограниченное вблизи точек a_{2k}, b_{2k}, дается формулой ([3]):

$$(1-i)\Phi(z) =$$

$$= X(z) \frac{1}{\pi i} \sum_0 \int_{a_{2k}}^{a_{2k+1}} X(t)^{-1} \left[(t-z)^{-1} + (2t-1)^{-1} (t+z-2tz)^{-1} \right] \times$$

$$\times [2\psi_{2k}(^1/_2\, t) + c_{2k}]\, dt -$$

$$- \frac{1}{\pi} X(z) \sum_1 \int_{a_{2k-1}}^{a_{2k}} X(t)^{-1} \left[(t-z)^{-1} - (2t-1)^{-1} (t+z-2tz)^{-1} \right] \times$$

$$\times [2\psi_{2k-1}(^1/_2 + ^1/_2\, t) - c_{2k-1}]\, dt + \bar{c} X(z),$$

где, например, при $n = 2m$ под $X(z) = \left[\dfrac{z \prod\limits_{1}^{m} (z - a_{2k})(z - b_{2k})}{(z-1) \prod\limits_{1}^{m} (z - a_{2k-1})(z - b_{2k-1})} \right]^{1/2}$

подразумевается ветвь, голоморфная в разрезанной вдоль $a_{2k}a_{2k+1}$, $b_{2k}b_{2k-1}$ плоскости, принимающая на бесконечности значения 1, а c обозначает произвольную действительную постоянную. В силу единственности решения задачи T_1 постоянные $\bar{c}$, c_k всегда можно подобрать так, чтобы $\Phi(z)$ была ограниченной и вблизи $z = a_{2k-1}$, $z = b_{2k-1}$*.

Поступило
27 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Лаврентьев и А. В. Бицадзе, ДАН, 70, № 3 (1950). [2] А. В. Бицадзе, ДАН, 70, № 4 (1950). [3] М. В. Келдыш и Л. И. Седов, ДАН, 16, 1 (1937).

* В работе ([2]) по вине автора формула (14) приведена неточно.