Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 3

ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Я. ХИНЧИН

О ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ „ЧИСЕЛ ЗАПОЛНЕНИЯ" В КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ

Целью настоящей заметки является показать, что развитые мною в последние годы методы обоснования асимптотических формул статистической физики с помощью предельных теорем теории вероятностей позволяют легко установить предельные законы распределения для так называемых «чисел заполнения», для которых обычные изложения дают лишь средние значения и дисперсии. Речь будет итти о системе одинаковых частиц (число частиц N, энергия E, объем V), подчиняющихся любой из трех основных статистических схем: Максвелла — Больцманна (P), Бозе — Эйнштейна (S) и Ферми — Дирака (A). Уровни энергии частицы предполагаются целыми числами; уровню r соответствует Vg_r различных линейно независимых состояний частицы, которые мы будем обозначать (в любом порядке) через $u_{r,1}$, $u_{r,2}, \ldots, u_{r,Vg_r}$. Число заполнения a_{rs} есть число частиц, находящихся в состоянии $u_{r,s}$ $(s = 1, 2, \ldots, Vg_r)$. В отношении дальнейших предпосылок, обозначений и терминологии см. мою книгу ([1]).

Общее число линейно независимых состояний системы при данных N, E и V мы обозначаем через $\Omega(N, E)$. Если m — целое неотрицательное число, то (микроканоническая) вероятность $P(a_{rs} = m)$ равенства $a_{rs} = m$ есть отношение числа $Q_{rs}(m)$ состояний системы, в которых $a_{rs} = m$, к числу $\Omega(N, E)$ всех состояний системы. Наша цель состоит в отыскании предела этой вероятности при условии, что N, E и V безгранично возрастают, сохраняя между собою постоянные отношения.

Наряду с совокупностью u_{kl} $(k = 1, 2, \ldots;\ l = 1, 2, \ldots, Vg_k)$ состояний частицы будем рассматривать и другую совокупность, получаемую из первой отбрасыванием состояния u_{rs} (так что уровню энергии r соответствует уже не Vg_r, а $Vg_r - 1$ линейно независимых состояний), и все величины, построенные на базе этой второй совокупности, будем отмечать знаком *. Тогда элементарные комбинаторные соображения легко дают для трех основных статистических схем

$$P(a_{rs} = m) = \binom{N}{m} \frac{\Omega^*(N - m, E - mr)}{\Omega(N, E)}, \tag{P}$$

$$P(a_{rs} = m) = \frac{\Omega^*(N - m, E - mr)}{\Omega(N, E)}, \tag{S}$$

$$P(a_{rs} = m) = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\Omega^*(N - m, E - mr)}{\Omega(N, E)} & (m \leqslant 1) \\ 0 & (m > 1) \end{matrix}\right\}. \tag{A}$$

Формулы (22) стр. 191 и (37) стр. 203 моей книги [1] дают при любых α и $\beta > 0$ и при любых целых $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, для которых $\Omega(p, q) \neq 0$, в любой из трех статистических схем

$$\Omega(p, q) = C(p)\,\Phi(\alpha, \beta)\, e^{\alpha p + \beta q} \left\{\frac{d}{2\pi V \sqrt{\delta}} + O\left(\frac{1 + u^2}{V^2}\right)\right\}. \tag{1}$$

Здесь $C(p) = p!$ (P), $C(p) = 1$ (S, A),

$$\ln \Phi(\alpha, \beta) = \left\{\begin{array}{ll} V \sum\limits_{r=1}^{\infty} g_r e^{-(\alpha+\beta r)} & (P) \\ -V \sum\limits_{r=1}^{\infty} g_r \ln\{1 - e^{-(\alpha+\beta r)}\} & (S) \\ V \sum\limits_{r=1}^{\infty} g_r \ln\{1 + e^{-(\alpha+\beta r)}\} & (A) \end{array}\right\}, \tag{2}$$

$$u = \max(|u_1|, |u_2|), \quad u_1 = p + \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \alpha}, \quad u_2 = q + \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \beta},$$

$$\delta = \frac{1}{V^2}\left\{\frac{\partial^2 \ln \Phi}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 \ln \Phi}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 \ln \Phi}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right)^2\right\} \tag{3}$$

и d — натуральное число, зависящее только от структуры частиц. Как обычно, мы выбираем α и β так, чтобы иметь $N + \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \alpha} = 0$, $E + \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \beta} = 0$. Тогда при $p = N$, $q = E$ имеем $u_1 = u_2 = 0$, и формула (1) дает (для всех трех статистик)

$$\Omega(N, E) = C(N)\,\Phi(\alpha, \beta)\, e^{\alpha N + \beta E} \left\{\frac{d}{2\pi V \sqrt{\delta}} + O\left(\frac{1}{V^2}\right)\right\}.$$

Для оценки $\Omega^*(N - m, E - mr)$ мы должны в (1) заменить Φ и δ соответственно через Φ^* и δ^* и положить

$$u_1 = N - m + \frac{\partial \ln \Phi^*}{\partial \alpha} = \frac{\partial \ln \Phi^*}{\partial \alpha} - \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \alpha} - m,$$

$$u_2 = E - mr + \frac{\partial \ln \Phi^*}{\partial \beta} = \frac{\partial \ln \Phi^*}{\partial \beta} - \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \beta} - mr;$$

но

$$\frac{\partial \ln \Phi^*}{\partial \alpha} - \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \alpha} = T_r = \frac{1}{e^{\alpha + \beta r} - \sigma},$$

$$\frac{\partial \ln \Phi^*}{\partial \beta} - \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \beta} = r T_r, \qquad \sigma = \left\{\begin{array}{ll} 0 & (P), \\ 1 & (S), \\ -1 & (A); \end{array}\right.$$

таким образом,

$$u_1 = T_r - m, \quad u_2 = r(T_r - m), \quad u = r\,|T_r - m|.$$

При $N \to \infty$ u остается постоянным, и мы находим в любой из трех схем

$$\Omega^* (N-m, E-mr) = C(N-m)\,\Phi^*(\alpha, \beta)\, e^{\alpha(N-m)+\beta(E-mr)} \left\{ \frac{d}{2\pi V \sqrt{\delta}} + O\left(\frac{1}{V^2}\right) \right\}.$$

Таким образом, мы получаем для любой из трех схем

$$P(a_{rs} = m) = \frac{1}{C(m)} \frac{\Phi^*(\alpha, \beta)}{\Phi(\alpha, \beta)} e^{-m(\alpha+\beta r)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{V}\right) \right\}$$

(так как $\delta/\delta^* = 1 + O(1/V)$, что легко следует из (3)).

В случае (P) $C(m) = m!$, и из (2) следует

$$\ln \frac{\Phi^*(\alpha, \beta)}{\Phi(\alpha, \beta)} = -e^{-(\alpha+\beta r)} = -T_r,$$

так что

$$P(a_{rs} = m) = e^{-T_r} \frac{T_r^m}{m!} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{V}\right) \right\} \tag{P}$$

(закон Пуассона с параметром T_r).

В случае (S) $C(m) = 1$, и из (2) следует

$$\ln \frac{\Phi^*(\alpha, \beta)}{\Phi(\alpha, \beta)} = \ln\{1 - e^{-(\alpha+\beta r)}\},$$

так что

$$P(a_{rs} = m) = \{1 - e^{-(\alpha+\beta r)}\} e^{-m(\alpha+\beta r)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{V}\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{T_r + 1} \left(\frac{T_r}{T_r + 1} \right)^m \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{V}\right) \right\} \tag{S}$$

(показательный закон).

Наконец, в случае (A) $C(m) = 1$,

$$\ln \frac{\Phi^*(\alpha, \beta)}{\Phi(\alpha, \beta)} = -\ln\{1 + e^{-(\alpha+\beta r)}\},$$

и мы легко находим

$$P(a_{rs} = 0) = (1 - T_r)\left\{ 1 + O\left(\frac{1}{V}\right) \right\}, \quad P(a_{rs} = 1) = T_r \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{V}\right) \right\}; \tag{A}$$

конечно, $P(a_{rs} = m) = 0$ при $m > 1$.

Результат (A), разумеется, тривиален, так как в случае, когда a_{rs} может принимать лишь значения 0 и 1, $P(a_{rs} = 1)$ равно математическому ожиданию числа a_{rs}, которое, как давно известно, в пределе совпадает с T_r.

Само собою разумеется, что выражения предельных значений моментов и центральных моментов чисел a_{rs} являются элементарными следствиями найденных предельных законов распределения.

Поступило
27 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Математические основания квантовой статистики, 1951.