Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Е. САЛИОН

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 14 IV 1951)

Устойчивость плоской формы изгиба под действием постоянных сил исследована весьма обстоятельно. Динамическая устойчивость плоского изгиба полос изучена весьма слабо, несмотря на практическое значение этого вопроса при расчете высоких двутавровых балок, подвергающихся переменной нагрузке. В настоящей статье рассмотрен случай динамической устойчивости полосы под действием изгибных периодических пар.

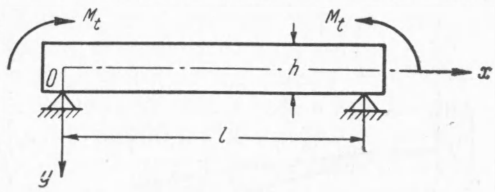

Рис. 1

Рассмотрим случай, когда по концам полосы в главной плоскости действуют равные периодические моменты, изменяющиеся по закону $M_t = M_0 \cos \omega t$, где M_0 — амплитуда изгибной пары, ω — круговая частота изменения пары.

Исследуем боковые колебания полосы в наименьшей плоскости изгиба при действии периодических изгибных пар и выясним вопрос, когда это движение делается неустойчивым. Дифференциальное уравнение изгиба полосы в плоскости наименьшей жесткости будет

$$B_1\, d^2u \,/\, dx^2 = M_0\, \varphi \cos \omega t, \tag{1}$$

B_1 — жесткость полосы при изгибе в наименьшей плоскости; φ — угол закручивания при выпучивании полосы.

Для угла закручивания полосы имеем дифференциальную зависимость

$$C\, d\varphi \,/\, dx = - M_0 \cos \omega t\, du \,/\, dx, \tag{2}$$

C — жесткость полосы на кручение.

Дифференцируя уравнение (1) дважды по x, уравнение (2) один раз по x и исключая $d^2\varphi \,/\, dx^2$, имеем

$$B_1 \frac{d^4u}{dx^4} = - \frac{M_0^2}{C} \cos^2 \omega t \frac{d^2u}{dx^2}. \tag{3}$$

Присоединяя силы инерции, приходящиеся на единицу длины полосы, получим

$$B_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{M_0^2}{C} \cos^2 \omega t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{4}$$

или, обозначая $M_0^2 / CB_1 = k^2$, $q / gB_1 = a^2$,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + k^2 \cos^2 \omega t \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{5}$$

Это дифференциальное уравнение четвертого порядка в частных производных с периодическими коэффициентами.

Решение уравнения (5) будем искать в форме:

$$u\,(x,\ t) = w\,(t) \sin\,(n \pi x / l), \tag{6}$$

$w\,(t)$ — функция только времени.

Подставив это значение $u\,(x,\ t)$ в уравнение (5) и обозначив $\theta_n = n^2 \pi^2 / l^2 a$ (частота собственных колебаний порядка n), $M_{кр}^2 = n^2 \pi^2 CB_1 / l^2$, $M_0^2 / M_{кр}^2 = b_n^2$, получим уравнение Матье:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \theta_n^2 \left(1 - \frac{b_n^2}{2}\right) \left\{1 - \frac{b_n^2 \cos 2\omega t}{2\,(1 - b_n^2 / 2)}\right\} w = 0. \tag{7}$$

Как известно, если между частотой возбуждения ω и собственной частотой θ_n существуют соотношения $\omega / \theta_n = 1,\ 2 \ldots$, то процесс колебаний становится неустойчивым, наступает так называемый параметрический резонанс, характеризуемый чрезвычайно быстрым нарастанием амплитуды. Этот резонанс наступает не только для частот $\omega = \theta_n,\ 2\theta_n, \ldots$, но и для частот, расположенных вблизи от них по обе стороны. Следовательно, имеются непрерывные области частот резонанса. Заметим, что первая область резонанса располагается вблизи собственной частоты, равной частоте возбуждения, т. е. $\omega = \theta_n$. Для границ областей неустойчивости получим:

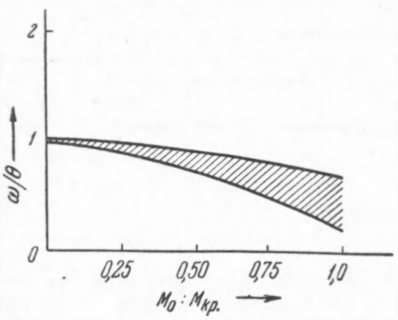

Рис. 2

1-я область резонанса $$\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{M_0}{M_{кр}}\right)^2} \geqslant \frac{\omega}{\theta_n} \geqslant \sqrt{1 - \frac{3}{4}\left(\frac{M_0}{M_{кр}}\right)^2}; \tag{8}$$

2-я область резонанса $$\sqrt{4 + \frac{5}{3}\left(\frac{M_0}{M_{кр}}\right)^4} \geqslant \frac{\omega}{\theta_n} \geqslant \sqrt{4 - \frac{1}{3}\left(\frac{M_0}{M_{кр}}\right)^4} \tag{9}$$

и т. д. Наибольшее практическое значение имеет исследование первой области возникновения резонанса. Согласно уравнению (8), эта область будет ограничена кривыми линиями (см. рис. 2, зона неустойчивости заштрихована).

Институт горного дела
им. М. М. Федорова
Академии наук УССР

Поступило
15 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Смирнов, Статическая и динамическая устойчивость сооружений, 1947. [2] И. И. Гольденблат, Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений, 1947.