Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

И. РЯБЦЕВ

О МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ С. Н. БЕРНШТЕЙНА И ЧЕЗАРО

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 9 IV 1951)

В настоящей заметке устанавливается связь между методами суммирования С. Н. Бернштейна и Чезаро.

Ф. И. Харшиладзе показал [3], что метод суммирования С. Н. Бернштейна $(Б,\ 1)$ сильнее метода Чезаро $(C,\ 1)$:

$$(C,\ 1) \subset (Б,\ 1);$$

И. И. Огиевецкий установил [4], что имеет место соотношение:

$$(Б,\ 1) \subset (C,\ 2+\alpha), \qquad \alpha > 0.$$

По предложению И. Е. Огиевецкого, мною была исследована связь между методами $(Б,\ 1)$ и $(C,\ 1+\alpha)$, $\alpha > 0$, и обнаружено, что имеет место соотношение:

$$(Б,\ 1) \subset (C,\ 1+\alpha), \qquad \alpha > 0.$$

Метод С. Н. Бернштейна $(Б,\ 1)$ можно [1] определить при помощи выражения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n} (s_k + s_{k+1}), \tag{1}$$

где $s_k = \sum\limits_{\nu=0}^{k} u_\nu$ — частные суммы ряда $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$. Выражение (1) эквивалентно следующему:

$$\lim_{n\to\infty} Б_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2s_0 + 2s_1 + \cdots + 2s_{n-1} + s_n}{2n+1}. \tag{2}$$

Метод $(C,\ 1+\alpha)$ определяется выражением:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{(1+\alpha)} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n^\alpha s_0 + A_{n-1}^\alpha s_1 + \cdots + A_1^\alpha s_{n-1} + A_0^\alpha s_n}{A_n^{1+\alpha}}, \tag{3}$$

где [2]

$$A_k^\alpha = \frac{\Gamma(k+\alpha-1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)} = \frac{(k+1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(1+\varepsilon_k),$$
$$\varepsilon_k \to 0, \quad k\to\infty; \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{4}$$

причем можно показать, что

$$\varepsilon_k = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right). \tag{5}$$

Лемма 1. *Любая последовательность $\{s_k\}$, суммируемая методом (Б, 1) к числу s, суммируема к тому же числу методом (С, $1+\alpha$), где $\alpha > 0$ — любое действительное число.*

Из (2) получим:

$$s_k = \frac{1}{\Delta_{k+1}} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k+\nu} \Delta_k^{(\nu)} Б_\nu,$$

где

$$\Delta_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2}{2k+1} & \frac{2}{2k+1} & \frac{2}{2k+1} & \dots & \frac{1}{2k+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{(2k+1)!!}$$

и $\Delta_k^{(\nu)}$ — соответствующий минор:

$$\Delta_k^{(\nu)} = \frac{2(2\nu+1)}{(2k+1)!!}, \quad \nu < k; \quad \Delta_k^{(k)} = \frac{2k+1}{(2k+1)!!}.$$

Итак,

$$s_0 = Б_0; \qquad s_k = 2\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{k+\nu} (2\nu+1) Б_\nu + (2k+1) Б_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда

$$\sigma_n^{(1+\alpha)} = \frac{1}{A_n^{1+\alpha}} \left\{ A_n^\alpha Б_0 + \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^\alpha \left[2\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{k+\nu} (2\nu+1) Б_\nu + (2k+1) Б_k \right] \right\};$$

$$\sigma_n^{(1+\alpha)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)\left[A_{n-k}^\alpha - 2A_{n-k-1}^\alpha + 2A_{n-k-2}^\alpha - \dots + (-1)^{n-k} 2A_0^\alpha\right]}{A_n^{1+\alpha}} Б_k + \tag{6}$$

$$+ \frac{(2n+1) A_0^\alpha}{A_n^{1+\alpha}} Б_n.$$

Обозначим

$$a_{nk} = \frac{(2k+1)\left[A_{n-k}^\alpha - 2A_{n-k-1}^\alpha + 2A_{n-k-2}^\alpha - \dots + (-1)^{n-k} 2A_0^\alpha\right]}{A_n^{1+\alpha}}, \qquad k < n;$$

$$a_{nn} = \frac{(2n+1) A_0^\alpha}{A_n^{1+\alpha}}.$$

Покажем, что коэффициенты a_{nk} преобразования

$$\sigma_n^{(1+\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} Б_k$$

удовлетворяют условиям Теплица.

В самом деле:

$$a_{nk} \to 0, \quad n \to \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

так как

$$a_{nk}=(2k+1)\ \frac{A_{n-k}^{1+\alpha}}{A_n^{1+\alpha}}\ \sigma_{n-k}^{(1+\alpha)}\{1,\ -2,\ 2,\ -2,\ \ldots\};$$

но при $\alpha>0$ $\frac{A_{n-k}^{1+\alpha}}{A_n^{1+\alpha}}<1$, а последовательность $1, -2,\ 2, -2, \ldots$ суммируется к нулю методом $(C,\ 1)$, а потому суммируется к тому же числу и методом $(C,\ 1+\alpha)$.

Далее, из (6):

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}=\frac{1}{A_n^{1+\alpha}}\left\{A_n^\alpha+\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^\alpha\left[2\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^{k+\nu}(2\nu+1)+(2k+1)\right]\right\}=1.$$

Наконец, покажем, что сумма

$$\sum_{k=0}^{n}|a_{nk}|=$$

$$=\frac{(2n+1)\,A_0^\alpha}{A_n^{1+\alpha}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n-2k+1)\left|A_k^\alpha-2A_{k-1}^\alpha+2A_{k-2}^\alpha-\ldots+(-1)^k\,2A_0^\alpha\right|}{A_n^{1+\alpha}}$$

ограничена по n.

В самом деле, в силу (4) и (5),

$$A_\nu^\alpha-A_{\nu-1}^\alpha=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(\nu+1)^\alpha(1+\varepsilon_\nu)-\nu^\alpha(1+\varepsilon_{\nu-1})\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\alpha\nu^{\alpha-1}+\nu^\alpha(\varepsilon_\nu-\varepsilon_{\nu-1})+\alpha\nu^{\alpha-1}\varepsilon_\nu+O(\nu^{\alpha-2})\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\alpha\nu^{\alpha-1}+O(\nu^{\alpha-2})\right],\quad \nu=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Поэтому при k четном

$$A_k^\alpha-2A_{k-1}^\alpha+2A_{k-2}^\alpha-\ldots+(-1)^k\,2A_0^\alpha=A_k^\alpha-2\sum_{\nu=1}^{k/2}(A_{2\nu-1}^\alpha-A_{2\nu-2}^\alpha)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{(k+1)^\alpha+O(k^{\alpha-1})-2\sum_{\nu=1}^{k/2}\left[\alpha(2\nu-1)^{\alpha-1}+O(\nu^{\alpha-2})\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[k^\alpha-2\alpha\sum_{\nu=1}^{k/2}(2\nu-1)^{\alpha-1}+O(k^{\alpha-1})\right]=O(k^{\alpha-1}),$$

так как, на основании формулы Эйлера — Маклорена,

$$\sum_{\nu=1}^{k/2}(2\nu)^{\alpha-1}=\frac{k^\alpha}{2\alpha}+O(k^{\alpha-1}),\tag{7}$$

и при k нечетном:

$$A_k^\alpha-2A_{k-1}^\alpha+2A_{k-2}^\alpha-\ldots+(-1)^k 2A_0^\alpha=A_k^\alpha-2A_{k-1}^\alpha+2\sum_{\nu=1}^{(k-1)/2}(A_{2\nu-1}^\alpha-A_{2\nu-2}^\alpha)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[k^\alpha-2k^\alpha+2\alpha\sum_{\nu=1}^{(k-1)/2}(2\nu-1)^{\alpha-1}+O(k^{\alpha-1})\right]=O(k^{\alpha-1})$$

на основании (7).

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{nk}| = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{(n+1)^{1+\alpha}[1+o(1)]} \sum_{k=0}^{n} (2n-2k+1) |O(k^{\alpha-1})| =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{1+o(1)} (n+1)^{-(1+\alpha)} \left[(2n+1) \sum_{k=0}^{n} \left| O(k^{\alpha-1}) \right| - 2 \sum_{k=0}^{n} k \, |O(k^{\alpha-1})| \right] = O(1).$$

Лемма 2. *Из суммируемости методом* $(C,\ 1+\alpha)$, $\alpha > 0$, *вообще говоря, не следует суммируемость методом* $(Б,\ 1)$.

Из (3) получим:

$$s_k = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k+\nu} \frac{D_k^{(\nu)}}{D_{k+1}} \sigma_\nu^{(1+\alpha)},$$

где

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} \dfrac{A_0^\alpha}{A_0^{1+\alpha}} & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{A_1^\alpha}{A_1^{1+\alpha}} & \dfrac{A_0^\alpha}{A_1^{1+\alpha}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{A_k^\alpha}{A_k^{1+\alpha}} & \dfrac{A_{k-1}^\alpha}{A_k^{1+\alpha}} & \cdots & \dfrac{A_0^\alpha}{A_k^{1+\alpha}} \end{vmatrix}$$

и $D_k^{(\nu)}$ — соответствующий минор.

Тогда

$$Б_n = \frac{1}{2n+1} \left[2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k+\nu} \frac{D_k^{(\nu)}}{D_{k+1}} \sigma_\nu^{(1+\alpha)} + \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n+\nu} \frac{D_n^{(\nu)}}{D_{n+1}} \sigma_\nu^{(1+\alpha)} \right],$$

откуда следует, что коэффициент при $\sigma_n^{(1+\alpha)}$

$$b_{nn} = \frac{1}{2n+1} \frac{D_n^{(n)}}{D_{n+1}} = \frac{A_n^{1+\alpha}}{2n+1} = \frac{[1+o(1)]}{\Gamma(\alpha+2)} \frac{(n+1)^{1+\alpha}}{(2n+1)} \to \infty, \quad n \to \infty,$$

поэтому третье условие Теплица не выполняется.

Теорема. *Методы суммирования С. Н. Бернштейна и Чезаро удовлетворяют соотношению:*

$$(C,\ 1) \subset (Б,\ 1) \subset (C,\ 1+\alpha),$$

где $\alpha > 0$ — *любое действительное число.*

В самом деле, на основании лемм 1 и 2:

$$(Б,\ 1) \subset (C,\ 1+\alpha), \quad \alpha > 0.$$

На основании теоремы Ф. И. Харшиладзе (3):

$$(C,\ 1) \subset (Б,\ 1).$$

Следовательно,

$$(C,\ 1) \subset (Б,\ 1) \subset (C,\ 1+\alpha), \quad \alpha > 0.$$

Днепропетровский государственный университет

Поступило
16 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Карамата, Матем. сборн., **21** (63): 1, 13 (1947). [2] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939, стр. 48. [3] Ф. И. Харшиладзе, Матем. сборн., **11** (53) 1—2, 145 (1942). [4] И. И. Огиевецкий, ДАН, **76**, № 5 (1951).