Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Я. Б. ЛОПАТИНСКИЙ

НОРМАЛЬНЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 13 IV 1951)

Рассматривается система уравнений вида

$$\sum_{l=1}^{p} A_{kl} u_l = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p); \tag{1}$$

здесь $A_{kl} = \sum\limits_{j_1+\cdots+j_n \leqslant s} f^{kl}_{j_1 \ldots j_n} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}$; $f^{kl}_{j_1 \ldots j_n}$ суть действительные функции действительных аргументов $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$, непрерывно дифференцируемые в некоторой области D $j_1 + \cdots + j_n$ раз, соответственно. Пусть при $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ и действительных, ненулевых в совокупности, значениях $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$\det \left(\sum_{j_1+\cdots+j_n = s} f^{kl}_{j_1 \ldots j_n} \alpha_1^{j_1} \cdots \alpha_n^{j_n} \right)^{p}_{k,\, l=1} \neq 0. \tag{2}$$

В этом случае и система (1) и сопряженная система

$$\sum_{k=1}^{p} A'_{kl} u_k = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p) \tag{3}$$

являются в области D системами эллиптического типа *.

В заметке [1] было приведено определение фундаментальной системы решений системы (1).

Матрица $\varphi(x, y) = (\varphi_{kl}(x, y))^{p}_{k,\, l=1}$, столбцы которой составляют фундаментальную систему решений системы уравнений (1), с особенностью в точке $y = (y_1, \ldots, y_n)$, будет называться фундаментальной матрицей системы (1).

Матрица $\varphi(x, y)$ будет называться нормальной фундаментальной матрицей системы (1), если транспонированная матрица $\varphi'(x, y)$ является фундаментальной матрицей сопряженной системы (3) (по аргументам

* Дифференциальный оператор A'_{kl} определяется формулой

$$A'_{kl} u = \sum_{j_1+\cdots+j_n \leqslant s} (-1)^{j_1+\cdots+j_n} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n} (f^{kl}_{j_1 \ldots j_n} u)}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}}.$$

$y_1, \ldots, y_n$) с особенностью в точке x. В случае двух аргументов для эллиптических систем частного вида с аналитическими коэффициентами существование нормальных фундаментальных матриц было показано И. Н. Векуа (см., например, [2]). Используя прием И. Н. Векуа и результаты заметки [1] *, удается установить существование нормальных фундаментальных матриц для уравнений более общего вида.

Именно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть каждый коэффициент при производной порядка j в операторах A_{kl} системы* (1) *непрерывно дифференцируем $j+t$ раз* ($t>0$) *и «формально» старшие коэффициенты* (*при производных порядка s*) *непрерывно дифференцируемы* $\max\{2+t, s+t\}$ *раз.*

Тогда, если в D выполнено условие (2), *то во всякой конечной области, замыкание которой содержится в D, существует нормальная фундаментальная матрица $\omega(x, y)$ системы* (1).

При этом, если $j_1+\cdots+j_n \leqslant t$, $k_1+\cdots+k_n \leqslant t$, то матрица

$$\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n+k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}\partial y_1^{k_1}\cdots\partial y_n^{k_n}}\,\omega(x, y)$$

непрерывна при $x \neq y$ и или элементы этой матрицы (*при $n-s+j_1+\cdots+j_n+k_1+\cdots+k_n<0$*), *или матрицы*

$$\frac{1}{\lg|x-y|}\,\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n+k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}\partial y_1^{k_1}\cdots\partial y_n^{k_n}}\,\omega(x, y)$$

(*при $n-s+j_1+\cdots+j_n+k_1+\cdots+k_n=0$*), *или матрицы*

$$|x-y|^{n-s+j_1+\cdots+j_n+k_1+\cdots+k_n}\,\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n+k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}\partial y_1^{k_1}\cdots\partial y_n^{k_n}}\,\omega(x, y)$$

(*при $n-s+j_1+\cdots+j_n+k_1+\cdots+k_n>0$*) *ограничены.*

Доказательство этого утверждения проводится по следующей схеме. Пусть $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ суть фундаментальные матрицы (с особенностью в точке y) систем (1), (2), соответственно. Существование этих матриц следует из приведенного здесь уточнения теоремы из [1]. Основываясь на интегральных уравнениях, определяющих эти матрицы по методу Э. Э. Леви [3], устанавливается «достаточная» дифференцируемость этих матриц. Тогда, следуя И. Н. Векуа, нормальную фундаментальную матрицу $\omega(x, y)$ в области V, $\overline{V} \subseteq D$, можно определить формулой

$$\omega(x, y) = \psi'(x, y) + \int\limits_V \varphi(x, z)\, A\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)\psi'(x, z)\,dz;$$

здесь $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = (A_{kl})_{k,\, l=1}^{p}$.

Опираясь на эту теорему, из представления решения эллиптической системы, получаемого обычным образом из формулы Грина [1], можно доказать следующую теорему.

---

* Следует исправить формулировку теоремы 1 в [1]. Именно, можно утверждать существование фундаментальной матрицы системы (1), вообще говоря, не во всей области D, а только в каждой конечной области, замыкание которой содержится в D.

С этой оговоркой теорема 1 верна в предположении, что коэффициенты при производных порядка j в операторах A_{kl} непрерывно дифференцируемы $\max\{j, 1\}$ раз и коэффициенты при производных (высшего) порядка s_l непрерывно дифференцируемы $\max\limits_{l} s_l + 1$ раз.

Теорема 2. *При сделанных в теореме 1 предположениях (при $t \geqslant s$), если $g(x)$ непрерывно дифференцируемый в D $t-s$ раз функциональный столбец, то всякое s раз непрерывно дифференцируемое в D решение матричного уравнения:*

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = g(x),$$

непрерывно дифференцируемо в D t раз.

Используя известный результат И. Г. Петровского об аналитичности достаточно гладких решений аналитической системы дифференциальных уравнений эллиптического типа, получается далее теорема 3.

Теорема 3. *Если коэффициенты операторов A_{kl} системы* (1), *удовлетворяющей условию* (2), *являются аналитическими в D функциями аргументов $x_1, \ldots, x_n$, то всякое s раз непрерывно дифференцируемое в D решение системы* (1) *состоит из аналитических в D функций.*

Поступило
16 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Б. Лопатинский, ДАН, **71**, № 3 (1950). [2] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М., 1948. [3] Э. Э. Леви, Усп. матем. наук, **8**, 100, 249 (1941).