Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. Я. ЛЕВИН

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 IV 1951)

При изучении некоторых вопросов, относящихся к распределению корней целых функций одной переменной, существенную роль играет следующий класс целых функций.

Классом $\overline{HB}$ называется класс целых функций $\omega(z)$, удовлетворяющих условиям: а) $\omega(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости ($\operatorname{Im} z < 0$); б) при $\operatorname{Im} z < 0$ $|\omega(z)| \geqslant |\omega(\bar{z})|$.

Этот класс функций был введен и изучен М. Г. Крейном ([1]) в связи с его исследованиями по проблеме Гурвица для целых трансцендентных функций *.

Существенную роль играют также некоторые подклассы класса $\overline{HB}$. Таким является, в частности, подкласс P — функций конечной степени. Этому классу можно дать независимое определение.

Целая функция $\omega(z)$ конечной степени называется функцией класса P, если она не имеет корней в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ и $h_\omega(-\pi/2) \geqslant h_\omega(\pi/2)$ ($h_\omega(\theta)$ — индикатор роста функции $\omega(z)$).

В статьях ([3–4]) автора показано, что эти классы тесно связаны с некоторыми экстремальными свойствами целых функций и некоторые свойства этих классов позволяют получать весьма общие точные оценки, аналогичные тем, которые были впервые получены С. Н. Бернштейном ([5–6]).

В этой заметке мы продолжаем изучение указанных классов и связанных с ними экстремальных свойств, проводя исследование сразу для функций от нескольких переменных. Для сокращения мы ограничимся случаем функций от двух переменных.

Определение. Целая функция $\omega(z, u)$ называется функцией класса $\overline{HB}$, если при $\operatorname{Im} z < 0$ и $\operatorname{Im} u < 0$: а) $\omega(z, u) \neq 0$; б) $|\omega(z, u)| \geqslant |\omega(\bar{z}, u)|$; $|\omega(z, u)| \geqslant |\omega(z, \bar{u})|$; $|\omega(z, u)| \geqslant |\omega(\bar{z}, \bar{u})|$.

Из этого определения непосредственно следует, что если последовательность функций класса $\overline{HB}$ равномерно сходится в каждой ограниченной области, то предельная функция принадлежит $\overline{HB}$.

Примером функции класса $\overline{HB}$ может служить произведение функций класса $\overline{HB}$ одной переменной $\omega_1(z)\,\omega_2(u)$. Можно привести и менее тривиальные примеры.

---

* М. Г. Крейн требует, чтобы в б) выполнялось строгое неравенство. Обозначение HB для этого класса было введено Н. Н. Мейманом (([2]), стр. 130).

Определение. Функция $\omega(z, u)$ называется $\overline{HB}$-мажорантой целой функции $f(z, u)$, если $\omega(z, u) \in \overline{HB}$ и при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, $\operatorname{Im} u \leqslant 0$

$$|\omega(z, u)| \geqslant |f(z, u)|; \quad |\omega(z, u)| \geqslant |f(\bar{z}, u)|;$$
$$|\omega(z, u)| \geqslant |f(z, \bar{u})|; \quad |\omega(z, u)| \geqslant |f(\bar{z}, \bar{u})|. \tag{1}$$

Теорема 1. *Для того чтобы при всех* $|v| \geqslant 1$ *функция*

$$\varphi_v(z, u) = f(z, u) - v\,\omega(z, u) \tag{2}$$

принадлежала $\overline{HB}$, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\omega(z, u)$ *была* $\overline{HB}$-*мажорантой целой функции* $f(z, u)$.

Доказательство опускаем.

Определение. Мы будем называть допустимым классом всякий подкласс T класса $\overline{HB}$, обладающий свойством: для того чтобы функция $\varphi_v(z, u) = f(z, u) - v\omega(z, u)$ принадлежала классу T при всяком $|v| \geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы $\omega(z, u)$ была $\overline{HB}$-мажорантой целой функции $f(z, u)$ и принадлежала T (T-мажоранта).

Классом P мы назовем функции $\omega(z, u)$ из $\overline{HB}$ и конечной степени по каждой из переменных при ограниченной другой переменной, т. е. таких, что

$$\lim_{|u| \leqslant R,\ |z| \to \infty} \frac{\ln|\omega(z, u)|}{|z|} = \sigma_R^{(1)} < \infty, \qquad \lim_{|z| \leqslant R,\ |u| \to \infty} \frac{\ln|\omega(z, u)|}{|u|} = \sigma_R^{(2)} < \infty. \tag{3}$$

Легко видеть, что P — допустимый класс.

Определение. $\mathfrak{B}_T$-оператором называется аддитивный однородный оператор, определенный на линейном множестве целых функций, содержащем допустимый класс T, и переводящий функции класса T в функции класса T.

Из этих определений непосредственно следует теорема 2.

Теорема 2. *Если* $\omega(z, u)$ *есть* T-*мажоранта целой функции* $f(z, u)$, *то функция* $\mathfrak{B}_T[f(z, u)]$ *есть* T-*мажоранта функции* $\mathfrak{B}_T[f(z, u)]$ ($\mathfrak{B}_T$ — *произвольный* $\mathfrak{B}_T$-*оператор*).

$\mathfrak{B}_P$-оператор мы будем называть просто $\mathfrak{B}$-оператором.

Теорема 3. *Оператор частного дифференцирования есть* $\mathfrak{B}$-*оператор*.

Доказательство. 1. Для функций одной переменной эта теорема была доказана ранее ([3, 4]). Если $\omega(z, u) \in P$, то при фиксированном u ($\operatorname{Im} u \leqslant 0$) функция $\omega(z, u) \in P$ по z (P_z). Поэтому при $\operatorname{Im} u \leqslant 0$ и $\omega'_z(z, u) \in P_z$. Следовательно, $\omega'_z(z, u) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z < 0$, $\operatorname{Im} u < 0$. Кроме того,

$$|\omega'_z(z, u)| \geqslant |\omega'_z(\bar{z}, u)| \quad \text{при } \operatorname{Im} z \leqslant 0,\ \operatorname{Im} u \leqslant 0. \tag{4}$$

2. Из определения класса P следует, что при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, $\operatorname{Im} u \leqslant 0$

$$|\omega(z, u)| \geqslant |\omega(z, \bar{u})|, \quad |\omega(z, u)| \geqslant |\omega(\bar{z}, \bar{u})|,$$

т. е. при фиксированном u функция $\omega(z, u)$ переменной z есть P-мажоранта функции $\omega(z, \bar{u})$. По теореме 2 (для функций одной переменной) отсюда следует, что $\omega'_z(z, u)$ есть P-мажоранта для функций $\omega'_z(z, \bar{u})$ и, следовательно, при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, $\operatorname{Im} u \leqslant 0$ имеем

$$|\omega'_z(z, u)| \geqslant |\omega'_z(z, \bar{u})|, \quad |\omega'_z(z, u)| \geqslant |\omega'_z(\bar{z}, \bar{u})|. \tag{5}$$

Таким образом, $\omega'_z(z, u) \in \overline{HB}$.

3. Из интегрального представления

$$\omega'_z(z, u) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z| = \delta} \frac{\omega(\zeta, u)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

следует, что $\omega'_z(z, u)$ конечной степени и, следовательно, класса P.

Теорема доказана.

Замечание. Такими же рассуждениями можно показать, что всякий $\mathfrak{B}$-оператор для функций одной переменной является $\mathfrak{B}$-оператором для функций от нескольких переменных, если он функцию конечной степени по каждой из переменных при ограниченной другой переводит в функцию того же класса. К такому типу относятся все $\mathfrak{B}$-операторы, рассмотренные в ([3], [4]).

Заметим еще, что произведение $\mathfrak{B}$-операторов и, в частности, оператор $\frac{\partial^{l+k}}{\partial x^l \partial y^k}$ есть $\mathfrak{B}$-оператор.

Обозначим через $\hat{P}$ класс таких функций из P, степень которых по каждой из переменных сохраняет постоянное значение при всех значениях другой переменной (за исключением, быть может, изолированного множества значений).

Легко видеть, что если $\omega(z) \in P$, то при $a > 0$ и $b > 0$ будем иметь $\omega(az + bu) \in \hat{P}$. Очевидно, произведение таких функций также принадлежит $\hat{P}$. Кроме того, к такому произведению можно добавить произведение функций, для которых эти функции являются P-мажорантами.

Теорема 4. *Пусть* $\omega(z, u) \in \hat{P}$ *и ее степени* (σ_1, σ_2), *а* $f(z, u)$ *конечной степени* (τ_1, τ_2) *по совокупности переменных* *. *Если* $\sigma_1 \geqslant \tau_1$, $\sigma_2 \geqslant \tau_2$ *и*

$$|f(x, y)| \leqslant |\omega(x, y)| \quad (-\infty < x, y < \infty),$$

то

$$|\mathfrak{B}[f(x, y)]| \leqslant |\mathfrak{B}[\omega(x, y)]| \quad (-\infty < x, y < \infty),$$

где $\mathfrak{B}$ — *произвольный* $\mathfrak{B}$-*оператор.*

Для функций одной переменной эта теорема была доказана ранее ([3], [4]). Для случая нескольких переменных ее можно рассматривать как обобщение одной теоремы С. Н. Бернштейна ([7]). Заметим, что в теореме 4 на функцию $f(x, y)$ налагаются требования, относящиеся лишь к ее поведению при вещественных значениях переменных **.

---

* Определение см. в ([7]).

** Н. Н. Мейман доказал ([8]) следующую теорему, относящуюся к оператору однократного дифференцирования:

Если $\omega(z)$ есть $\overline{HB}$-мажоранта для $f(z)$, т. е.

$$|f(z)| \leqslant |\omega(z)|, \quad |\overline{f}(z)| \leqslant |\omega(z)|$$

во всей полуплоскости $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, то неравенство

$$|f'(z)| \leqslant |\omega'(z)|$$

выполняется на вещественной оси. Н. Н. Мейман утверждает (([8]), стр. 609), что эта теорема «содержит в частности неравенство С. Н. Бернштейна и его обобщения вплоть до последних результатов Б. Я. Левина».

Это неверно. В действительности из теоремы Н. Н. Меймана не могут быть получены многие, известные в настоящее время, обобщения неравенства С. Н. Бернштейна и, в частности, не может быть получена теорема 4, являющаяся для случая функций одной переменной главным результатом работы ([4]). Метод Н. Н. Меймана существенно применим лишь к оператору однократного дифференцирования. В других же обобщениях рассматривается дифференцирование произвольного порядка и более общие операторы. При замене однократного дифференцирования двукратным утверждение теоремы Н. Н. Меймана перестает быть верным.

(Это нам кажется существенным, так как аналитические свойства функции определяются скоростью приближения функциями конечной степени, если функция задана на вещественной оси. Приближение в полуплоскости с этой точки зрения не представляет интереса.)

Доказательство основано на следующей лемме, доказанной в ([4]) и являющейся обобщением принципа Фрагмена и Линделефа *.

Если $f(z)$ конечной степени и $\omega(z)$ класса $P(z)$, причем степень $\omega(z)$ не меньше, чем степень $f(z)$, то из неравенства $|f(x)| \leqslant |\omega(x)|$ при $(-\infty < x < \infty)$ следует неравенство $|f(z)| \leqslant |\omega(z)|$ при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$.

С помощью этой леммы можно показать, что при выполнении условий теоремы 4 функция $\omega(z, u)$ является P-мажорантой для $f(z, u)$. Дальше следует воспользоваться теоремой 2.

Заметим, что для функций одной переменной функции конечной степени образуют самый общий класс целых функций, в котором неравенство между модулями функций на вещественной оси влечет за собою соответствующее неравенство между модулями производных. Можно также показать, что класс целых функций, для которого при дифференцировании сохраняется соотношение (1) мажорации в полуплоскости, несколько шире — это некоторый специальный класс целых функций второго рода.

Харьковский горный институт

Поступило
12 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, О некоторых вопросах в теории моментов, 1938, стр. 208—252. [2] Н. Г. Чеботарев и Н. Н. Мейман, Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций, М., 1949. [3] Б. Я. Левин, ДАН, **65**, № 5 (1949). [4] Б. Я. Левин, Изв. АН СССР, **14**, № 1, 45 (1950). [5] С. Н. Бернштейн, Leçons sur les propriétés extrémales et meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, Paris, 1926. [6] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, М., 1937. [7] С. Н. Бернштейн, ДАН, **60**, № 6 (1948). [8] Н. Н. Мейман, ДАН, **71**, № 4 (1950). [9] M. L. Cartwright, Proc. London Math. Soc., **38**, part 2, 158 (1934).

* Эта лемма легко может быть получена из одной теоремы М. Картрайт ([9]).