Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

В. И. КРЫЛОВ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАИМЕНЬШЕЙ ОБЛАСТИ, ГОЛОМОРФНОСТЬ В КОТОРОЙ ОБЕСПЕЧИВАЕТ СХОДИМОСТЬ ЭРМИТОВСКОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ПРИ ЛЮБОЙ СИСТЕМЕ УЗЛОВ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 IV 1951)

Мы будем рассматривать интерполирование с кратными узлами, или эрмитовское интерполирование. Пусть F есть любое ограниченное замкнутое множество точек плоскости комплексного переменного z. Будем считать, что узлы интерполирования всегда лежат на F и пусть

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{1}$$

есть матрица таких узлов. Допустим, кроме того, что Φ также есть произвольное ограниченное замкнутое множество точек плоскости, безразлично совпадающее или не совпадающее с F.

Наконец, пусть σ есть любая область плоскости, содержащая внутри себя F и Φ, и $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в σ.

Обозначим $P_{n-1}(f; z)$ полином степени $n-1$, интерполирующи $f(z)$ по узлам, принадлежащим строке номера n матрицы (1).

Если область σ является достаточно широкой, то тогда наверное при всяких $z \in \Phi$ интерполирование будет сходящимся:

$$P_{n-1}(f; z) \to f(z), \quad n \to \infty, \quad z \in \Phi.$$

Мы постараемся выяснить, какова минимальная область, регулярность в которой интерполируемой функции $f(z)$ обеспечивает сходимость интерполирования на множестве Φ при любой матрице узлов (1).

Пусть (F) — выпуклая оболочка множества F и D — любая касательная прямая к ней. Допустим, что $z \in \Phi$ и z' есть зеркальное отображение z относительно D. Будем непрерывно изменять направление касательной D и „обкатывать" ею (F), наблюдая за тем, чтобы z и (F) всегда оставались по одну сторону от касательной.

Если $z \in (F)$, то поворот D при обкатывании (F) будет выполнен на 2π. Если же z лежит вне (F), то поворот будет выполнен на угол, дополнительный до 2π к углу, под которым из точки z видна оболочка (F). При таком обкатывании точка z' будет непрерывно перемещаться в плоскости и опишет простую замкнутую линию λ_z. Замкнутую область, ею ограниченную, обозначим $\varkappa_z$. Она будет содержать в себе (F).

Условимся точки F и Φ обозначать, соответственно, t и z, а буквою ζ — любую точку комплексной плоскости.

Если ζ расположена вне $\varkappa_z$, то $\left|\frac{z-t}{\zeta-t}\right|<1$.

Когда же $\zeta \in \varkappa_z$, то существует такая точка $t \in F$, что $\left|\frac{z-t}{\zeta-t}\right| \geqslant 1$.

С целью достигнуть того, чтобы при всяких $z \in \Phi$ и $t \in F$ было $\left|\frac{z-t}{\zeta-t}\right|<1$, мы будем рассматривать теоретико-множественную сумму областей $\varkappa_z$

$$\varkappa = \bigcup_{z \in \Phi} \varkappa_z.$$

Можно видеть, что если замкнутые множества F и Φ не вырождаются в одну совпадающую точку, то $\varkappa$ есть некоторая замкнутая область плоскости. Множества F и Φ оба содержатся в $\varkappa$.

При ζ, лежащих вне $\varkappa$, и для любых t и z из F и Φ будет $\left|\frac{z-t}{\zeta-t}\right|<1$. Более того, если M есть любое замкнутое множество точек плоскости, не пересекающееся с $\varkappa$, то дробно-линейная функция $\frac{z-t}{\zeta-t}$, рассматриваемая как функция трех аргументов $z \in \Phi$, $t \in F$ и $\zeta \in M$, будет ограничена сверху по модулю числом <1.

При ζ же принадлежащем $\varkappa$ наверное существуют такие $t \in F$ и $z \in \Phi$, что $\left|\frac{z-t}{\zeta-t}\right| \geqslant 1$.

Теорема 1. *Если $f(z)$ есть любая аналитическая функция, регулярная в $\varkappa$, то существуют такие числа $q<1$ и A, не зависящие от $z \in \Phi$ и выбора матрицы* (1), *что*

$$|R_n(f;z)| = |f(z) - P_{n-1}(f;z)| \leqslant Aq^n.$$

Из оценки следует сходимость интерполирования.

Так как $f(z)$ считается регулярной в замкнутой области $\varkappa$, то она будет регулярной в некоторой более широкой области. Поэтому наверное существует замкнутая линия l, содержащая $\varkappa$ внутри себя и такая, что $f(z)$ будет регулярной как на ней самой, так и всюду внутри ее.

Если обозначить $\omega(z) = (z - x_1^{(n)}) \ldots (z - x_n^{(n)})$, то, как известно ((1), n°16), остаток интерполирования может быть представлен следующим контурным интегралом:

$$R_n(f;z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\omega(z)}{\omega(\zeta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ввиду того, что $z \in \Phi$, $x_j^{(n)} \in F$ и $\zeta \in l$, существует число q, не зависящее от z, $x_j^{(n)}$, ζ и такое, что

$$\left|\frac{z - x_j^{(n)}}{\zeta - x_j^{(n)}}\right| \leqslant q < 1.$$

Поэтому $\left|\frac{\omega(z)}{\omega(\zeta)}\right| \leqslant q^n$, и для остатка интерполирования будет иметь место оценка

$$|R_n(f;z)| \leqslant \frac{q^n}{2\pi} \max_{z \in \Phi} \int_l \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| ds = Aq^n.$$

Мы покажем, что $\varkappa$ есть минимальная область, регулярность в которой обеспечивает сходимость интерполирования при любой матрице узлов (1), и из нее, в принятых условиях задачи, не может быть устранена ни одна точка. Возьмем любую точку a плоскости, не содержащуюся в $F+\Phi$.

Теорема 2. *Если $a \in \varkappa$, то существует такая функция, регулярная в $\varkappa - a$, и такая матрица* (1) *узлов интерполирования, для которых интерполирование будет расходящимся в некоторой точке $z \in \Phi$.*

Рассмотрим функцию $\frac{1}{z-a}$. Она регулярна на всей плоскости, исключая точку a. Остаток интерполирования ее равен

$$R_n\left(\frac{1}{z-a}; z\right) = \frac{\omega(z)}{\omega(a)} \frac{1}{z-a}.$$

Так как $a \in \varkappa$, существуют такие точки $t' \in F$ и $z' \in \Phi$, для которых $\left|\frac{z'-t'}{a-t'}\right| \geqslant 1$. Будем считать, что все узлы $x_j^{(n)}$ $(j=1,\ldots,n)$ совпадают с t'. Тогда интерполирование будет выполняться по значениям $\frac{1}{z-a}$ и ее производных до порядка $n-1$ в точке t'. Интерполирующий полином $P_{n-1}\left(\frac{1}{z-a}; z\right)$ будет отрезком ряда Тейлора около точки t'. Полином $\omega(z)=(z-t')^n$. Остаток интерполирования в точке z' будет иметь значение

$$R_n\left(\frac{1}{z-a}; z'\right) = \left(\frac{z'-t'}{a-t'}\right)^n \frac{1}{z'-a}.$$

Так как $\left|\frac{z'-t'}{a-t'}\right| \geqslant 1$, R_n при $n \to \infty$ не будет стремиться к нулю и интерполирование функции $\frac{1}{z-a}$ в точке z' будет расходящимся.

Отметим еще частный случай рассмотренной задачи, относящийся к интерполированию действительных аналитических функций. Будем считать, что узлы интерполирования лежат на конечном отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Пусть нас интересует сходимость $P_{n-1}(f; x) \to f(x)$ на некотором другом отрезке действительной оси $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Мы остановимся на наиболее интересном случае, когда $[\alpha, \beta]$ либо совпадает с $[a, b]$, либо является его правильной частью.

Выпуклая оболочка $[a, b]$ совпадает с самим отрезком и операции „обкатывания" ее будет отвечать вращение прямой линии на угол π около концов отрезка. Если $x \in [\alpha, \beta]$, то линия λ_x будет состоять из двух окружностей $|z-a| = x-a$ и $|z-b| = b-x$, в чем легко убедиться путем построения чертежа. Область $\varkappa$ образуется наложением двух кругов $|z-a| \leqslant \beta - a$ и $|z-b| \leqslant b-\alpha$.

Полученные выше результаты дают возможность высказать следующую теорему.

Теорема 3. *Если аналитическая функция $f(x)$ регулярна в двух кругах $|z-a| \leqslant \beta - a$ и $|z-b| \leqslant b-\alpha$, то, каковы бы ни были узлы интерполирования на отрезке $[a, b]$, будет иметь место сходимость интерполирования*

$$P_{n-1}(f; x) \to f(x)$$

равномерно относительно $x \in [\alpha, \beta]$.

Указанная область регулярности является минимальной обеспечивающей сходимость интерполирования на $[\alpha, \beta]$ для всякой функции, аналитической на $[a, b]$, при любой матрице узлов.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
7 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, 1934.