

П. П. КОРОВКИН

О ЗАМКНУТОСТИ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ЧЕБЫШЕВА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 17 III 1951)

Пусть функции $f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) непрерывны на сегменте $[a, b]$ и такие, что всякий полином

$$\pi_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k f_k(x)$$

имеет не более n корней на сегменте $[a, b]$, если $a_n \neq 0$. Систему функций $f_n(x)$, удовлетворяющих отмеченным условиям, следуя С. Н. Бернштейну, называют системой функций Чебышева (T -системой).

Известно, что для того, чтобы последовательность функций $f_n(x)$ была T -системой, необходимо и достаточно, чтобы определители

$$D_n = D_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} f_0(x_0) & f_1(x_0) & \dots & f_n(x_0) \\ f_0(x_1) & f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(x_n) & f_1(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

были отличны от нуля, если $x_i \neq x_k$ при $i \neq k$.

Лемма 1. Если $|\pi_n(x_k)| \leq 1$ ($k = 0, 1, \dots, n$), то найдется число $M_n = M_n(x_0, x_1, \dots, x_n)$ такое, что будут иметь место неравенства:

$$|a_k| \leq M_n \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Доказательство. Положим

$$\Delta_{s, k} = \begin{vmatrix} f_0(x_0) & \dots & f_{s-1}(x_0) & f_{s+1}(x_0) & \dots & f_n(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(x_{k-1}) & \dots & f_{s-1}(x_{k-1}) & f_{s+1}(x_{k-1}) & \dots & f_n(x_{k-1}) \\ f_0(x_{k+1}) & \dots & f_{s-1}(x_{k+1}) & f_{s+1}(x_{k+1}) & \dots & f_n(x_{k+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(x_n) & \dots & f_{s-1}(x_n) & f_{s+1}(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}.$$

$$\delta_n = |D_n(x_0, x_1, \dots, x_n)|, \quad A_n = \max_{s, k=0, 1, \dots, n} |\Delta_{s, k}|.$$

Из системы уравнений

$$\pi_n(x_s) = \sum_{k=0}^n a_k f_k(x_s) = y_s \quad (-1 \leq y_s \leq 1; s = 0, 1, \dots, n)$$

находим

$$a_s = \frac{\sum_{k=1}^n \pm y_k \Delta_{s,k}}{D_n}, \quad |a_s| \leq \frac{n+1}{\delta_n} A_n = M_n.$$

Лемма 2. При любом заданном $\varepsilon > 0$ и любых заданных $x_0, x_1, \dots, x_n$ из $[a, b]$ найдется $\delta_n > 0$ такое, что если $|\pi_n(x_s)| \leq 1$ ($s = 0, 1, \dots, n$) и $|x - x_k| \leq \delta_n$, где $x \in [a, b]$, то

$$|\pi_n(x) - \pi_n(x_k)| \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Так как функции $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$, то по числу ε можно указать $\delta_n > 0$ такое, что неравенства

$$|f_s(x) - f_s(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{M_n(n+1)} \quad (s = 0, 1, \dots, n) \quad (1)$$

будут иметь место, если

$$|x - x_k| \leq \delta_n. \quad (2)$$

Из (1) и леммы 1 получаем

$$|\pi_n(x) - \pi_n(x_k)| \leq M_n \sum_{s=0}^n |f_s(x) - f_s(x_k)| \leq M_n \frac{(n+1)\varepsilon}{M_n(n+1)} = \varepsilon.$$

Теорема. На сегменте $[a, b]$ можно указать совершенное множество F такое, что всякую функцию $f(x)$, непрерывную на множестве F , можно равномерно аппроксимировать полиномами $\pi_n(x)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю.

Положим $x_0 = a$, $x_1 = b$. В силу леммы 2, найдется $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \frac{b-a}{2}$ такое, что неравенство $|\pi_1(x) - \pi_1(x_s)| \leq \varepsilon_1$ ($s = 0, 1$) будет иметь место, если $|\pi_1(x_s)| \leq 1$, $|x - x_s| \leq \delta_1$.

Полагая $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = a + \delta_1$, $x_3 = b - \delta_1$, найдем число $\delta_2 > 0$, $\delta_2 < \delta_1/2$ такое, что неравенство $|\pi_2(x) - \pi_2(x_s)| \leq \varepsilon_2$ ($s = 0, 1, 2, 3$) будет иметь место, если $|\pi_2(x_s)| \leq 1$, $|x - x_s| \leq \delta_2$.

Полагая $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = a + \delta_1$, $x_3 = b - \delta_1$, $x_4 = a + \delta_2$, $x_5 = a + \delta_1 - \delta_2$, $x_6 = b - \delta_1 + \delta_2$, $x_7 = b - \delta_2$, найдем число $\delta_3 > 0$, $\delta_3 < \delta_2/2$ такое, что неравенство $|\pi_3(x) - \pi_3(x_s)| \leq \varepsilon_3$ ($s = 0, 1, \dots, 7$) будет иметь место, если $|\pi_3(x_s)| \leq 1$, $|x - x_s| \leq \delta_3$.

Продолжая неограниченно этот процесс, мы построим последовательность точек $x_0, x_1, x_2, \dots$ и совершенное множество F , которое является замыканием множества точек x_n . При этом для всякого $x \in F$ и всякого целого положительного n найдется среди чисел x_s ($s = 0, 1, \dots, 2^n - 1$) такое x_k , что $|x - x_k| \leq \delta_n$, и, следовательно, мы будем иметь

$$|\pi_{2^n-1}(x) - \pi_{2^n-1}(x_k)| \leq \varepsilon_n. \quad (3)$$

Пусть теперь $f(x)$ — функция, непрерывная на множестве F , и пусть $\pi_{2^n-1}(x)$ — полином такой, что

$$\pi_{2^n-1}(x_s) = f(x_s) \quad (s = 0, 1, \dots, 2^n - 1).$$

Если $x \in F$, то найдется x_k ($k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$) такое, что $|x - x_k| \leq \delta_n$ и, следовательно, $|\pi_{2^n-1}(x) - \pi_{2^n-1}(x_k)| \leq M\varepsilon_n$, где

$M = \max_{x \in F} |f(x)|$. Но $|f(x) - \pi_{2^n-1}(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |\pi_{2^n-1}(x) - \pi_{2^n-1}(x_k)| \leq \omega(\delta_n) + M\epsilon_n$, где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$. Так как $\delta_n \rightarrow 0$, то и $\omega(\delta_n) \rightarrow 0$. Этим теорема доказана.

Следствие. Так как система функций $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots$ ($\alpha_i \neq \alpha_k$ при $i \neq k$) есть T -система на всяком сегменте $[a, b]$ ($b > a > 0$), то найдется совершенное множество F такое, что система $\{x^{\alpha_n}\}$ будет замкнута в пространстве функций, непрерывных на множестве F .

Замечание 1. Пользуясь полученными выше результатами, можно показать, что быстрота стремления к нулю наилучшего приближения функции полиномами зависит не только от дифференциальных свойств функции, но и от множества, на котором эти приближения рассматриваются.

Этот факт отмечался нами ранее для случая, когда

$$\pi_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

причем нами было показано, что аналитичность функции $f(x)$ на множестве F следует из неравенства $\max |f(x) - \pi_n(x)| \leq r^n$ ($r < 1$) только тогда, когда граница области D , дополнительной к множеству F , не содержит иррегулярных точек.

Замечание 2. Из хода доказательства теоремы следует, что для всякой чебышевской системы функций можно указать совершенное множество F и систему узлов интерполирования, принадлежащую F и такую, что некоторая подпоследовательность интерполяционных полиномов Лагранжа равномерно сходится ко всякой функции, непрерывной на множестве F . Можно показать, что утверждение справедливо и для всей последовательности*.

Замечание 3. Теорема не может иметь места для линейно независимой системы функций.

Калининский государственный
педагогический институт

Поступило
14 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937.

* В случае, когда $f_n(x) = x^n$, этот факт был ранее и другим путем получен А. Н. Шеншевым.