Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

И. Е. ЖАК и М. Ф. ТИМАН

АБСОЛЮТНАЯ АБЕЛЕВА СУММИРУЕМОСТЬ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 IV 1951)

В настоящей заметке дается определение $|A|$-суммируемости двойных рядов и исследуется взаимосвязь этого метода с методами $|C, \alpha, \beta|$, $\alpha, \beta > -1$, и методом (A) [1, 2]. Устанавливаются также некоторые теоремы относительно $|A|$-суммируемости двойных рядов Фурье — Лебега.

Определение. Назовем ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ $|A|$-суммируемым, если функция $g(r, \rho) = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn} r^m \rho^n$, $0 \leqslant r, \rho < 1$, обладает конечными и суммируемыми частными производными $\partial^2 g(r, \rho) / \partial r\, \partial\rho$, $\partial g(r, \rho)/\partial r$ (при фиксированном ρ), $\partial g(r, \rho)/\partial\rho$ (при фиксированном r).

Теорема 1. *Если двойной ряд суммируем методом* $|C, \alpha, \beta|$, $\alpha, \beta > -1$, *то он суммируем также методом* $|A|$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{mn}$ суммируем методом $|C, \alpha, \beta|$, $\alpha, \beta > -1$. Это означает, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - \sigma_{m,\,n-1}^{\alpha\beta} - \sigma_{m-1,\,n}^{\alpha\beta} + \sigma_{m-1,\,n-1}^{\alpha\beta}\right| < \infty; \tag{1}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left|\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - \sigma_{m-1,\,n}^{\alpha\beta}\right| < \infty, \quad n \text{ фиксировано}; \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - \sigma_{m,\,n-1}^{\alpha\beta}\right| < \infty, \quad m \text{ фиксировано}, \tag{3}$$

где $\sigma_{mn}^{\alpha\beta}$ — (C, α, β)-средние данного ряда. В силу $|C, \alpha, \beta|$-суммируемости данного ряда существует константа M [7] такая, что $|a_{mn}| < M m^{\alpha} n^{\beta}$, следовательно, функция $g(r, \rho)$ конечна вместе со всеми ее частными производными.

Далее, ввиду (1):

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial^2 g(r, \rho)}{\partial r\, \partial\rho}\right| dr\, d\rho = \int_0^1\int_0^1 \left|\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m n a_{mn} r^{m-1}\rho^{n-1}\right| dr\, d\rho =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (1-r)^{\alpha}(1-\rho)^{\beta}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}^{\alpha\beta} r^{m-1}\rho^{n-1}\right| dr\, d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|T_{mn}^{\alpha\beta}|\int_0^1\int_0^1(1-r)^{\alpha}(1-\rho)^{\beta}r^{m-1}\rho^{n-1}\,dr\,d\rho=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\tau_{mn}^{\alpha\beta}|}{mn}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\sigma_{mn}^{\alpha\beta}-\sigma_{m,\,n-1}^{\alpha\beta}-\sigma_{m-1,\,n}^{\alpha\beta}+\sigma_{m-1,\,n-1}^{\alpha\beta}|<\infty,$$

где $T_{mn}^{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}A_{m-i}^{\alpha-1}A_{n-j}^{\beta-1}ija_{ij}$; $\quad \tau_{mn}^{\alpha\beta}=\dfrac{T_{mn}^{\alpha\beta}}{A_m^{\alpha}A_n^{\beta}}$; $\quad A_p^{\gamma}=\dbinom{p+\gamma}{p}$.

Аналогично показывается на основании (2) суммируемость $\partial g(r,\rho)/\partial r$ (при фиксированном ρ) и на основании (3) суммируемость $\partial g(r,\rho)/\partial\rho$ (при фиксированном r).

Покажем теперь, что существуют двойные ряды, которые суммируемы методом $|A|$ и не суммируемы никаким методом $|C,\alpha,\beta|$, $\alpha,\beta>-1$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{mn}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{A_m^iA_n^j}{i!\,j!}$.
Легко проверить, что для этого ряда $g(r,\rho)=[(1+r)(1+\rho)]^{-1}e^{\frac{1}{1+r}+\frac{1}{1+\rho}}$ и, следовательно, он суммируем методом $|A|$. Однако он не суммируем никаким методом $|C,\alpha,\beta|$, $\alpha,\beta>-1$, так как $a_{mn}>e^m e^n$, $m,n\to\infty$, каковы бы ни были $\alpha,\beta>-1$, и, следовательно, необходимое условие $|C,\alpha,\beta|$-суммируемости не выполняется ([1]).

Из доказанного тривиально следует, что всякий абсолютно сходящийся двойной ряд $|A|$-суммируем и что обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 2. *Если двойной ряд $|A|$-суммируем, то он также (A)-суммируем.*

Действительно, если ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{mn}$ суммируем, то функция $g(r,\rho)=$ $=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{mn}r^m\rho^n$, $0\leqslant r,\rho<1$, имеет ограниченное изменение в смысле Каратеодори, а также ограниченное изменение по каждому переменному при фиксированном другом. На этом основании легко показать существование и конечность $\lim\limits_{\substack{r\to 1-0\\ \rho\to 1-0}} g(r,\rho)$, что и доказывает суммируемость данного ряда методом Абеля. Обратное, вообще говоря, неверно. Положим, например,

$$g(r,\rho)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}r^m\rho^n=(1-r)(1-\rho)\sin\frac{1}{1-r}\sin\frac{1}{1-\rho}.$$

Очевидно, что ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{mn}$, будучи (A)-суммируемым, не суммируем $|A|$.

В заключение укажем некоторые условия $|A|$-суммируемости двойных рядов Фурье — Лебега.

Пусть

$$f(x,y)\sim\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{mn}A_{mn}(x,y), \tag{4}$$

где $A_{mn}(x,y)=a_{mn}\cos mx\cos ny+b_{mn}\sin mx\cos ny+c_{mn}\cos mx\sin ny+$ $+d_{mn}\sin mx\sin ny$; a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn} — коэффициенты Фурье — Лебега функции $f(x,y)$; $\lambda_{m0}=\lambda_{0n}=1/2$, $\lambda_{mn}=1$, $m,n\geqslant 1$, $\lambda_{00}=1/4$. Положим $\varphi_{x,y}(s,t)=f(x+s,y+t)+f(x-s,y+t)+f(x+s,y-t)+f(x-s,y-t)-$ $-4f(x,y)$, $\varphi_x(s,t)=f(x+s,t)-f(x,t)$; $\varphi_y(s,t)=f(s,y+t)-f(s,y)$.

Теорема 3. *Если функция $f(x,y)$ в точке (x,y) удовлетворяет условиям:*

$$\int_0^\pi\int_0^\pi |\varphi_{x,y}(s,t)|\, s^{-1}t^{-1}\,ds\,dt<\infty, \tag{5}$$

$$\int_0^\pi\int_0^\pi |\varphi_x(s,t)|\, s^{-1}\,ds\,dt<\infty, \qquad \int_0^\pi\int_0^\pi |\varphi_y(s,t)|\, t^{-1}\,ds\,dt<\infty, \tag{6}$$

то ряд (4) $|A|$*-суммируем в точке* (x,y).

Доказательство. Положим:

$$g(r,\rho)\equiv g(x,y;r,\rho)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{mn}A_{mn}(x,y)\,r^m\rho^n,\quad 0\leqslant r,\rho<1.$$

Так как коэффициенты Фурье — Лебега образуют ограниченную последовательность, то функция $g(r,\rho)$ и ее частные производные конечны. Пользуясь формулами для коэффициентов Фурье, находим, что

$$g(r,\rho)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \varphi_{x,y}(s,t)\,P(r,s)\,P(\rho,t)\,ds\,dt+f(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 g(r,\rho)}{\partial r\,\partial\rho}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \varphi_{x,y}(s,t)\,\frac{\partial P(r,s)}{\partial r}\,\frac{\partial P(\rho,t)}{\partial\rho}\,ds\,dt, \tag{7}$$

где $P(\alpha,u)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha^k\cos ku=\frac{1-\alpha^2}{2(1-2\alpha\cos u+\alpha^2)}$, $0\leqslant\alpha<1$. Заметим, что $1-2\alpha\cos u+\alpha^2=(1-\alpha)^2+4\alpha\sin^2(u/2)>2\sqrt{\alpha}\,(1-\alpha)\sin(u/2)$. Таким образом, при $0\leqslant u\leqslant\pi/2$ $P(\alpha,u)<Cu^{-1}$, где C — константа. Далее, $\frac{\partial P(\alpha,u)}{\partial\alpha}=\frac{(1+\alpha^2)\cos u-2\alpha}{(1-2\alpha\cos u+\alpha^2)^2}$.

Можно показать, что: 1) каково бы ни было α_1, $0<\alpha_1<1$, существует u_1, $0<u_1<\pi/2$, такое, что $\partial P(\alpha,u)/\partial\alpha\geqslant 0$, $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$, $0\leqslant u\leqslant u_1$; 2) каково бы ни было u_2, $0<u_2<\pi/2$, $\partial P(\alpha,u)/\partial\alpha\geqslant 0$, если $\alpha\leqslant\chi(u)$, $\partial P(\alpha,u)/\partial\alpha<0$, если $1\geqslant\alpha>\chi(u)$, где $u_2\leqslant u\leqslant\pi/2$, $0<\chi(u)=(1-\sin u)/\cos u<1$. Кроме того, очевидно: 3) $|\partial P(\alpha,u)/\partial\alpha|<K$, $\pi/2\leqslant u\leqslant\pi$, где K — константа.

Каково бы ни было α_1, $0<\alpha_1<1$, находим, в соответствии с 1), такое u_1, что при $0\leqslant u\leqslant u_1$

$$\int_0^{\alpha_1}\left|\frac{\partial P(\alpha,u)}{\partial\alpha}\right|d\alpha=P(\alpha,u)\Big|_0^{\alpha_1}<M_1u^{-1}. \tag{8}$$

Далее, на основании 2) при $u_1\leqslant u\leqslant\pi/2$ получаем

$$\int_0^{\alpha_1}\left|\frac{\partial P(\alpha,u)}{\partial\alpha}\right|d\alpha\leqslant\int_0^{1}\left|\frac{\partial P(\alpha,u)}{\partial\alpha}\right|d\alpha=$$

$$=\int_0^{\chi(u)}\frac{\partial P(\alpha,u)}{\partial\alpha}\,d\alpha-\int_{\chi(u)}^{1}\frac{\partial P(\alpha,u)}{\partial\alpha}\,d\alpha\leqslant 2P(\alpha,u)\Big|_{\alpha=\chi(u)}<M_2u^{-1}. \tag{9}$$

В силу 3)

$$\int_0^\alpha \left|\frac{\partial P(\alpha, u)}{\partial \alpha}\right| d\alpha < M_3, \tag{10}$$

каковы бы ни были $0<\alpha<1$, $\pi/2 \leqslant u \leqslant \pi$, где M_1, M_2, M_3 — константы.

Вследствие (8), (9), (10), (11), (5) находим

$$\int_0^{r_1}\int_0^{\rho_1} \left|\frac{\partial^2 g(r, \rho)}{\partial r\, \partial \rho}\right| dr\, d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi |\varphi_{x,y}(s, t)|\, ds\, dt \int_0^{r_1}\left|\frac{\partial P(r, s)}{\partial r}\right| dr \int_0^{\rho_1}\left|\frac{\partial P(\rho, t)}{\partial \rho}\right| d\rho < \infty,$$

каковы бы ни были r_1, ρ_1, $0 \leqslant r_1$, $\rho_1 < 1$.

Положим теперь

$$g(r, \rho) = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty A_{mn}(x, y)\, r^m \rho^n + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^\infty (a_{m0}\cos mx + b_{m0}\sin mx)\, r^m +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty (a_{0n}\cos ny + c_{0n}\sin ny)\, \rho^n + \frac{1}{2}a_{00} = g_1(r, \rho) + g_2(r) + g_3(\rho) + \frac{1}{4}a_{00}.$$

Суммируемость $\partial g_1(r, \rho)/\partial r$ (ρ фиксировано), $\partial g_1(r, \rho)/\partial \rho$ (r фиксировано) доказывается аналогично предыдущему на основании (5).

Далее нетрудно показать, что ряды $\sum\limits_{m=1}^\infty (a_{m0}\cos mx + b_{m0}\sin mx)$, $\sum\limits_{n=1}^\infty (a_{0n}\cos ny + c_{0n}\sin ny)$ являются, соответственно, рядами Фурье функций $\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x, y)\, dy$ и $\psi(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x, y)\, dx$.

Вследствие (6) функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ удовлетворяют, соответственно, условиям

$$\int_0^\pi |\varphi(x+s) - \varphi(x)|\, s^{-1}\, ds < \infty, \tag{11}$$

$$\int_0^\pi |\psi(y+t) - \psi(y)|\, t^{-1}\, dt < \infty. \tag{12}$$

Суммируемость $g_2'(r)$, $g_3'(\rho)$ в предположении, соответственно, (11), (12) является известным результатом ([3]). Впрочем, это легко показать и непосредственно, пользуясь указанным методом.

Тем самым теорема 3 полностью доказана.

Отметим без доказательства еще одну теорему.

Теорема 4. *Если функция $f(x, y)$ имеет в некоторой окрестности точки (x, y) ограниченное изменение в смысле Каратеодори и, кроме того, ограниченное изменение по каждому переменному при фиксированном другом, то ее двойной ряд Фурье — Лебега $|A|$-суммируем в точке (x, y).*

Поступило
27 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Е. Жак, ДАН, **73**, № 4 (1950). [2] М. Ф. Тиман, ДАН, **60**, № 7 (1948). [3] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, § 10, 5 (5), 1939.