Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Б. ВАСИЛЬЕВА

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО МАЛЫМ ПАРАМЕТРАМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 IV 1951)

Ниже предлагаются вниманию дальнейшие результаты исследования, о некоторых результатах которого сообщалось в ([1],[2]). Исследование касается производных по параметрам $\mu_1, \ldots, \mu_n$ от решения системы уравнений

$$\mu_\alpha \frac{dz_{j_\alpha}}{dt} = F_{j_\alpha}(z_{l_1}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t),$$
$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(z_{l_1}, \ldots, z_{l_n}, y_k, t) \tag{1}$$

при заданных начальных значениях $z_{j_\alpha}\big|_{t=0} = z^0_{j_\alpha}$, $y_i\big|_{t=0} = y^0_i$. Здесь и в дальнейшем $\alpha = 1, 2, \ldots, n$; $j_\alpha, l_\alpha = 1, 2, \ldots, m_\alpha$; $i, k = 1, 2, \ldots, m$. Множители μ_α при производных от неизвестных функций z_{j_α} в системе (1) являются функциями параметра μ, причем $\mu_\alpha > 0$, $\mu_\alpha \to 0$ при $\mu \to 0$ и $\mu_\alpha / \mu_{\alpha+1} \to 0$ при $\mu \to 0$.

Обратимся к частному случаю системы (1), когда каждое μ_α содержится множителем только в одном уравнении (т. е. $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1$). Систему (1) вместе с начальными условиями можно записать тогда следующим образом:

$$\mu_j \frac{dz_j}{dt} = F_j(z_l, y_k, t), \quad j, l = 1, 2, \ldots, n;$$
$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(z_l, y_k, t), \quad i, k = 1, 2, \ldots, m; \tag{2}$$
$$z_j\big|_{t=0} = z^0_j; \qquad y_i\big|_{t=0} = y^0_i.$$

Полагая здесь $\mu_j = 0$, получим вырожденную систему уравнений

$$F_j(z_l, y_k, t) = 0,$$
$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(z_l, y_k, t). \tag{3}$$

Функцию $z_1 = \varphi_1(z_2, \ldots, z_n, y_k, t)$, удовлетворяющую уравнению $F_1(z_1, z_2, \ldots, z_n, y_k, t) = 0$, назовем корнем первого порядка. Корень φ_{j+1} порядка $j+1$ определяется через корни порядка менее $j+1$ как функция, удовлетворяющая уравнению $F_{j+1}(\varphi_1^{(j)}, \ldots, \varphi_{j-1}^{(j)}, \varphi_j, z_{j+1}, \ldots, z_n, y_k, t) = 0$, где $\varphi_p^{(j)}(z_{j+1}, \ldots, z_n, y_k, t)$ $(p = 1, 2, \ldots, j-1)$ представляет собой корень порядка p, в котором аргумент z_{p+1} заменяется корнем φ_{p+1}, затем z_{p+2} заменяется через φ_{p+2} и т. д., наконец, z_j заменяется через φ_j.

А. Н. Тихоновым показано, что при условии непрерывности правых частей уравнений в системе (1) и ограниченности частных производных от φ_j по всем аргументам, далее, при специальном условии устойчивости ([3]) каждого из корней $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и, наконец, при условии принадлежности проекции начальной точки $(z_j^0, \ldots, z_n^0, y_k^0, 0)$ к так называемой области влияния устойчивого корня порядка j, определяемой в ([3]), решение $z_j(t, \mu)$, $y_i(t, \mu)$ исходной системы (2) при $\mu \to 0$ стремится к решению $\bar{z}_j(t)$, $\bar{y}_i(t)$ соответствующей вырожденной системы (3), определяемому условием $\bar{y}_i \big|_{t=0} = y_i^0$, т. е.

$$\begin{aligned} &\lim_{\mu\to 0} z_j(t, \mu) = \bar{z}_j(t) = \varphi_j^{(n)}(\bar{y}_k, t), && 0 < t \leqslant T; \\ &\lim_{\mu\to 0} y_i(t, \mu) = \bar{y}_i(t), && 0 \leqslant t \leqslant T; \end{aligned} \tag{4}$$

$[0, T]$ — некоторый конечный отрезок, связанный с размерами областей устойчивости.

Потребуем теперь дополнительно к условиям, данным А. Н. Тихоновым, существования такого хотя бы очень малого μ_0, чтобы для $0 \leqslant t \leqslant T$ и $\mu < \mu_0$ исследуемое решение принадлежало области пространства (t, y_i, z_j), где выполняются условия существования и непрерывности частных производных первого порядка по всем переменным от функций f_i, F_j и частных производных второго порядка от функций F_j. Если эти требования удовлетворяются, то систему (2) назовем, для краткости, принадлежащей к типу H. Условия принадлежности системы (1) к типу H даны в ([2]).

Обозначим:

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_l} = f_{il}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial y_k} = f_{ik}, \quad \frac{\partial F_j}{\partial z_l} = F_{jl}, \quad \frac{\partial F_j}{\partial y_k} = F_{jk},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_r} z_j(t, \mu) = \zeta_{jr}, \quad \frac{\partial}{\partial \mu_r} y_i(t, \mu) = \eta_{ir}, \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

Интересующие нас производные ζ_{jr}, η_{ir} удовлетворяют при нулевых начальных значениях следующей системе дифференциальных уравнений, получаемой дифференцированием (2) по μ_r:

$$\begin{aligned} &\mu_1 \frac{d\zeta_{1r}}{dt} = F_{1l}\zeta_{lr} + F_{1k}\eta_{kr}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mu_r \frac{d\zeta_{rr}}{dt} = F_{rl}\zeta_{lr} + F_{rk}\eta_{kr} - \frac{dz_r}{dt}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mu_n \frac{d\zeta_{nr}}{dt} = F_{nl}\zeta_{lr} + F_{nk}\eta_{kr}, \\ &\frac{d\eta_{ir}}{dt} = f_{il}\zeta_{lr} + f_{ik}\eta_{kr}. \end{aligned} \tag{5}$$

Коэффициенты этой линейной системы являются функциями $z_l(t, \mu)$, $y_k(t, \mu)$, t. Системе (5) соответствует вырожденная система, получаемая по тому же правилу, как (3) из (2). При этом в правых частях (5) аргументы в коэффициентах надо заменить их предельными значениями (4), а dz_r / dt заменить на $d\varphi_r^{(n)} / dt$. Первым n уравнениям полученной таким образом системы, которые теряют вследствие вырождения дифференциальный характер, можно поставить в соответствие систему корней $\zeta_{jr} = \psi_{jr}$, определяемых по тому же правилу, что φ_j. Функциям $\varphi_j^{(n)}$ здесь будут соответствовать $\psi_{jr}^{(n)}$.

Теорема 1. *Если система* (2) *принадлежит к типу H, то*

$$\lim_{\mu \to 0} \eta_{ir}(t, \mu) = \overline{\eta}_{ir}(t), \qquad 0 < t \leqslant T;$$

$$\lim_{\mu \to 0} \zeta_{jr}(t, \mu) = \overline{\zeta}_{jr}(t) = \psi_{jr}^{(n)}(\overline{\eta}_{kr}(t), t), \quad 0 < t \leqslant T.$$

Функции $\overline{\zeta}_{jr}$, $\overline{\eta}_{ir}$ удовлетворяют вырожденной системе уравнений, соответствующей (5), *при условии $\overline{\eta}_{ir} \big|_{t=0} = J_{ir}^{(n)}$, где $J_{ir}^{(n)}$ — некоторые числа, определяемые характером правых частей уравнений системы* (2).

Теорема остается справедливой и в общем случае, когда $m_\alpha \neq 1$, т. е. для системы (1); формулировка ее остается той же, только усложняются обозначения.

Укажем закон нахождения величин $J_{ir}^{(n)}$.

Рассмотрим, наряду с исходной системой, систему

$$\begin{gathered} F_p(z_l, y_k, t) = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, r-1; \\ \mu_s \frac{dz_s}{dt} = F_s(z_l, y_k, t), \quad s = r, r+1, \ldots, n; \\ \frac{dy_i}{dt} = f_i(z_l, y_k, t), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{gathered} \tag{6}$$

которую будем называть вырожденной со степенью вырождения $(r-1)/n$. Полностью вырожденная система (3) имеет степень вырождения, равную единице. Обозначим через $\tilde{z}_s(t, \mu)$, $\tilde{y}_i(t, \mu)$ решение системы (6), удовлетворяющее условиям $\tilde{z}_s \big|_{t=0} = z_s^0$, $\tilde{y}_i \big|_{t=0} = y_i^0$; производную $\partial \tilde{y}_i(t, \mu) / \partial \mu_r$ — через $\tilde{\eta}_{ir}(t, \mu)$; функцию, являющуюся, согласно теореме 1, предельной для $\tilde{\eta}_{ir}(t, \mu)$ на полуинтервале $(0, T)$, — через $\overline{\tilde{\eta}}_{ir}(t)$, а ее начальное значение через $\tilde{J}_{ir}^{(n)}$. Заметим, что для системы (6) дифференцирование по μ_r является дифференцированием по наименьшему параметру.

Теорема 2. *Числа $J_{ir}^{(n)}$ и $\tilde{J}_{ir}^{(n)}$, соответствующие исходной системе* (2) *и системе* (6), *вырожденной со степенью* $(r-1)/n$, *равны между собой.*

Формулы для $J_{i1}^{(1)}$ даны в ([1]). Исходя из этих формул, можно на основании теоремы 2 тотчас получить числа $J_{in}^{(n)}$, относящиеся к случаю дифференцирования по наибольшему параметру μ_n ([2]).

На основании той же теоремы 2 достаточно указать закон получения чисел $J_{ir}^{(n)}$ для случая $r = 1$, т. е. случая дифференцирования по наименьшему параметру. Обозначим $J_{i1}^{(n)} = J_i^{(n)}$. Как только что указано, формула для $J_i^{(1)}$ дана. Предположим, что получена формула для $J_i^{(n-1)}$. Системе (2) можно поставить в соответствие систему

$$\begin{gathered} \mu_q \frac{dz_q}{dt} = F_q(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n^0, y_k^0, 0), \;\; q = 1, 2, \ldots, n-1, \;\; s = 1, 2, \ldots, m+1; \\ \frac{dy_s}{dt} = f_s(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n^0, y_k^0, 0), \quad f_{m+1} = F_n \end{gathered} \tag{7}$$

при начальных условиях $z_q|_{t=0} = z_q^0$; $y_s|_{t=0} = y_s^0$ $(y_{m+1}^0 = z_n^0)$. Для такой системы, по предположению, числа $J_1^{(n-1)}, \ldots, J_{m+1}^{(n-1)}$ представляются определенными формулами. Обозначим эти числа, полученные именно для специальной системы (7), через $\overline{J}_1^{(n-1)}, \ldots, \overline{J}_{m+1}^{(n-1)}$. Тогда для $J_i^{(n)}$ будем иметь следующее выражение:

$$J_i^{(n)} = \overline{J}_i^{(n-1)} + \overline{J}_{m+1}^{(n-1)} \frac{\widetilde{f}_i(\varphi_n^0) - \widetilde{f}_i(z_n^0)}{\widetilde{F}_n(z_n^0)} - \int\limits_{z_n^0}^{\varphi_n^0} \frac{\widetilde{M}_{1n}\widetilde{M}_{n1}}{\widetilde{M}_{nn}^2} \frac{\widetilde{f}_i(\varphi_n^0) - \widetilde{f}_i(z_n)}{\widetilde{F}_n(z_n)} dz_n - \int\limits_{z_n^0}^{\varphi_n^0} \frac{[\widetilde{M}_{1n}\widetilde{M}_{n1}]_{F_n = f_i}}{\widetilde{M}_{nn}^2} dz_n. \quad (8)$$

Здесь

$$\widetilde{f}_i(z_n) = f_i(\varphi_1^{(n-1)}(z_n, y_k^0, 0), \ldots, z_n, y_k^0, 0),$$
$$\widetilde{F}_n(z_n) = F_n(\varphi_1^{(n-1)}(z_n, y_k^0, 0), \ldots, z_n, y_k^0, 0);$$

$\widetilde{M}_{nn}$, $\widetilde{M}_{1n}$ и $\widetilde{M}_{n1}$ — миноры определителя матрицы $\|\widetilde{F}_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Знак $\sim$ указывает, что функции берутся от аргументов $\varphi^{(n-1)}(z_n, y_k^0, 0), \ldots, z_n, y_k, 0$; $\varphi_n^0 = \varphi_n(y_k^0, 0)$.

Отметим, что в общем случае $m_\alpha \neq 1$ мы не располагаем формулой, аналогичной (8), связывающей $J_i^{(n)}$ и $J_i^{(n-1)}$; однако может быть указан вполне определенный процесс получения $J_i^{(n)}$ из $J_i^{(n-1)}$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Васильева, ДАН, **75**, № 4 (1950). [2] А. Б. Васильева, ДАН, **77**, № 5 (1951). [3] А. Н. Тихонов, Матем. сборн., **27** (69), № 1 (1950).