Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. М. ВАЙНБЕРГ

О СЛАБОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИОНАЛОВ И ИХ ГРАДИЕНТОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 17 IV 1951)

При качественном исследовании вариационных задач в бесконечномерных пространствах [1] важную роль играют свойства функционалов (для которых ищется минимум, максимум, точки минимакса) и их градиентов. Вопрос о связи между свойствами функционалов и их градиентов был изучен в работе [3].

В настоящей статье исследуется следующий вопрос, поставленный Л. А. Люстерником и возникший в связи с работами Э. С. Цитланадзе [3-7]. Известно, что в широком классе пространств из слабой непрерывности оператора $F(x)$ в шаре $\|x\| \leqslant r$ вытекает [7] его полная непрерывность (т. е. компактность и непрерывность) в этом шаре. Обратное предложение, вообще говоря, неверно. Например, функционал $f(x) = \|x\|$ компактен и непрерывен в шаре $\|x\| \leqslant r$, но в этом шаре он не будет слабо непрерывным. Возникает вопрос: каков класс нелинейных операторов, для которых из полной непрерывности следует слабая непрерывность? В частности, не будут ли таким свойством обладать градиенты функционалов? Из результатов, полученных в настоящей работе, как следствие, вытекает, что если градиент некоторого функционала удовлетворяет условию Липшица, то из его компактности следует слабая непрерывность, а значит, для операторов, рассмотренных в работах Э. С. Цитланадзе и В. И. Соболева [2-7], понятия вполне непрерывности и слабой непрерывности эквивалентны.

Мы будем предполагать, что функционалы $f(x)$ и операторы $F(x)$ заданы в вещественном гильбертовом пространстве H и что область значений $F(x)$ также принадлежит H. Впрочем, все результаты, которые будут ниже сформулированы, сохраняются, если вместо H рассматривать регулярное пространство Банаха с базисом. В последнем случае нужно предполагать, что оператор $F(x)$ действует из пространства Банаха B в сопряженное пространство $\overline{B}$. В отношении терминологии мы будет придерживаться следующих определений.

Определение 1. Функционал $f(x)$ или оператор $F(x)$ называется непрерывным в точке x_0 (слабо непрерывным в точке x_0), если, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к x_0, т. е. для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$ (слабо сходящаяся к x_0), $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \|F(x_n) - F(x_0)\| = 0$.

Определение 2. Оператор $F(x)$ называется компактным на множестве $E \subset H$, если он преобразует каждую ограниченную часть множества E в компактное множество.

Определение 3. Мы скажем, что функционал $f(x)$ или оператор $F(x)$ равномерно непрерывен на множестве $E \subset H$, если каждому $\varepsilon > 0$

отвечает такое $\delta > 0$, что для всяких двух точек x', $x'' \in E$ и удовлетворяющих условию $\| x' - x'' \| < \delta$ имеет место неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ или $\| F(x') - F(x'') \| < \varepsilon$.

Определение 4. Если

$$f(x+h) - f(x) = (F(x), h) + \omega(x, h), \tag{1}$$

где

$$\lim_{\| h \| \to 0} \frac{\omega(x, h)}{\| h \|} = 0, \tag{2}$$

то оператор $F(x)$ называется градиентом функционала $f(x)$ ($F(x) = \operatorname{grad} f(x)$) в точке x, а линейный относительно h функционал $(F(x), h)$ называется дифференциалом функционала $f(x)$ и обозначается $df(x, h)$.

Для дальнейшего мы обозначим через D шар $\| x \| \leqslant r$.

Определение 5. Мы скажем, что дифференциал функционала $f(x)$ имеет в шаре D равномерный остаток $\omega(x, h)$, если равенство (2) выполняется равномерно для всех $x \in D$, т. е. если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что $\frac{|\omega(x, h)|}{\| h \|} < \varepsilon$, как только $\| h \| < \delta$, $\| x + h \| \leqslant r$.

Теорема 1. *Из компактности в шаре D* $\operatorname{grad} f(x)$ *вытекает слабая непрерывность в D функционала $f(x)$.*

Доказательство использует формулу Лагранжа

$$f(x+h) - f(x) = (F(x+th), h) \tag{3}$$

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x), \quad 0 < t < 1, \quad x, h, x+h \in D,$$

которая выводится непосредственно исходя из определения градиента.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность из D, слабо сходящаяся к $x_0 \in D$. Допустим, что при $n \to \infty$ $f(x_n)$ не $\to f(x_0)$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что

$$|f(x_{n_k}) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Но, согласно (3), $f(x_{n_k}) - f(x_0) = (F(x_0 + t_{n_k}(x_{n_k} - x_0)), x_{n_k} - x_0)$.

Так как $\| x_0 + t_{n_k}(x_{n_k} - x_0) \| = (1 - t_{n_k}) \| x_0 \| + t_{n_k} \| x_{n_k} \| \leqslant r$, то, в силу компактности в D оператора $F(x)$, существует такая подпоследовательность $\{m_k\}$, что

$$\lim_{k \to \infty} \| F(x_0 + t_{m_k}(x_{m_k} - x_0)) - y_0 \| = 0.$$

Далее напишем, что $(F(x_0 + t_{m_k}(x_{m_k} - x_0)), x_{m_k} - x_0) = (y_0, x_{m_k} - x_0) + (F(x_0 + t_{m_k}(x_{m_k} - x_0)) - y_0, x_{m_k} - x_0)$. Но при $k \to \infty$ $(y_0, x_{m_k} - x_0) \to 0$, ибо $(x_{m_k} - x_0) \to 0$ и $|F(x_0 + t_{m_k}(x_{m_k} - x_0)) - y_0, x_{m_k} - x_0| \leqslant \| F(x_0 + t_{m_k}(x_{m_k} - x_0)) - y_0 \| 2r \to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{m_k}) = f(x_0)$, что противоречит неравенствам (4). Полученное противоречие доказывает теорему.

Заметим, что подобная теорема, при дополнительных ограничениях, была доказана Э. С. Цитланадзе ([4]) при помощи интегрального представления функционалов. Следует еще отметить, что обратное предложение неверно. Это видно из примера функции $f(t) = t^2 \sin \frac{1}{t^2}$, которая непрерывна на отрезке [0, 1], но производная которой неограничена на этом отрезке.

Теорема 2. *Если $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$ равномерно непрерывен в шаре D, то $df(x, h)$ имеет в D равномерный остаток.*

Доказательство. Пусть $x', x'' \in D$, тогда

$$f(x'') - f(x') = (F(x'), x'' - x') + \omega(x', x'' - x').$$

Далее, согласно равенству (3), будет

$$f(x'') - f(x') = (F(x' + t(x'' - x')), x'' - x').$$

Отсюда и из предыдущего равенства имеем

$$\omega(x', x'' - x') = (F(x' + t(x'' - x')) - F(x'), x'' - x'), \tag{5}$$

а следовательно,

$$\frac{|\omega(x', x'' - x')|}{\|x'' - x'\|} \leqslant \|F(x'\ t + (x'' - x')) - F(x')\|.$$

Данное неравенство, в силу равномерной непрерывности оператора $F(x)$, доказывает теорему.

Теорема 3. *Для слабой непрерывности в шаре D $\operatorname{grad} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы он был в D компактным и равномерно непрерывным.*

Доказательство. Необходимость этого условия вытекает из того, что всякий слабо непрерывный в шаре D оператор $\Phi(x)$ (или функционал) является в D компактным и равномерно непрерывным. Действительно, возьмем произвольное бесконечное множество $E \subset D$. В силу слабой компактности D, из E можно выделить последовательность $\{x_n\}$, которая слабо сходится к $x_0 \in D$, так что для слабо непрерывного оператора $\Phi(x)$ будет $\lim\limits_{n \to \infty} \|\Phi(x_n) - \Phi(x_0)\| = 0$, т. е. $\Phi(x)$ есть компактный оператор *. Далее допустим, что $\Phi(x)$ не является равномерно непрерывным в D. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$ и последовательность пар $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$, что

$$\|x'_n - x''_n\| < \frac{1}{n}; \quad \|\Phi(x'_n) - \Phi(x''_n)\| \geqslant \varepsilon. \tag{6}$$

Но из слабой компактности шара D вытекает существование подпоследовательности $\{x'_{n_k}\}$, слабо сходящейся к $x_0 \in D$, притом из (6) будет также следовать, что и $x''_{n_k} \to x_0$. Отсюда, в силу слабой непрерывности $\Phi(x)$, вытекает, что заданному $\varepsilon > 0$ отвечает такое N, что для $k \geqslant N$ будет $\|\Phi(x'_{n_k}) - \Phi(x_0)\| < \varepsilon/2$ и $\|\Phi(x''_{n_k}) - \Phi(x_0)\| < \varepsilon/2$. Из этих неравенств имеем $\|\Phi(x''_{n_k}) - \Phi(x'_{n_k})\| < \varepsilon$, что противоречит неравенствам (6). Необходимость доказана.

Заметим, что обратное предложение (в общем случае) неверно. Например, функционал $f(x) = \|x\|$ является равномерно непрерывным и компактным в D, но он не будет слабо непрерывным.

Доказательство достаточности. Из компактности оператора $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$, согласно теореме 1, следует слабая непрерывность в D функционала $f(x)$. Затем из равенства (5) и компактности $F(x)$ следует, что для всяких $x', x'', x'' - x' \in D$ будет $\|\omega(x', x'' - x')\| < C$ ($C = \text{const}$). Далее из равномерной непрерывности $F(x)$, согласно теореме 2, вытекает, что $df(x, h)$ имеет в D равномерный остаток. Таким

* Предложение, что из слабой непрерывности $\Phi(x)$ следует компактность $\Phi(x)$, принадлежит Э. С. Цитланадзе (7).

образом выполнены все условия теоремы 1 работы ([9]), из которой следует слабая непрерывность оператора $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$. Теорема доказана.

Из данной теоремы следует, что если компактный градиент удовлетворяет условию Липшица, то он является слабо непрерывным.

Московский областной
педагогический институт

Поступило
5 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 19 (1947). [2] В. И. Соболев, ДАН, 31, № 8 (1941). [3] Э. С. Цитланадзе, ДАН, 53, № 4 (1946). [4] Э. С. Цитланадзе, ДАН, 56, № 1 (1947). [5] Э. С. Цитланадзе, ДАН, 57, № 9 (1947). [6] Э. С. Цитланадзе, ДАН, 71, № 3 (1950). [7] Э. С. Цитланадзе, Автореферат диссертации, МГУ, 1951. [8] E. H. Rothe, Ann. of Math., 47, № 3, 580 (1946); 49, № 2, 265 (1948). [9] М. М. Вайнберг, ДАН, 75, № 5 (1950).