Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 5

МАТЕМАТИКА

С. С. БЮШГЕНС

О ЛИНИЯХ ТОКА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 IV 1951)

Я имею в виду установить характерные геометрические и кинематические свойства конгруенции линий тока стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости.

Соединим с каждой точкой $\overline{M}$ пространства или некоторой его области репер трех единичных и попарно ортогональных векторов J_1, J_2, J_3; тогда

$$d\overline{M} = \omega_0^\alpha J_\alpha, \tag{1}$$

$$dJ_1 = rJ_2 - qJ_3, \quad dJ_2 = pJ_3 - rJ_1, \quad dJ_3 = qJ_1 - pJ_2, \tag{2}$$

где ω_0^k, p, q, r — формы Пфаффа, связанные уравнениями структуры. Ниже внешние произведения форм Пфаффа я буду обозначать как обычные произведения без каких-либо добавочных символов.

Будем предполагать формы $\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3$ линейно независимыми, так что

$$\delta = \omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 \neq 0, \tag{3}$$

и положим, что

$$p = p_\alpha\omega_0^\alpha, \quad q = q_\alpha\omega_0^\alpha, \quad r = r_\alpha\omega_0^\alpha. \tag{4}$$

Векторное поле (J_3) огибает некоторую конгруенцию линий, определяемую условиями:

$$\omega_0^1 = 0, \qquad \omega_0^2 = 0; \tag{5}$$

на основании третьей из формул (2) вектор кривизны одной из этих линий в точке M будет

$$\frac{dJ_3}{ds} = q_3J_1 - p_3J_2. \tag{6}$$

Величина

$$-\operatorname{div} J_3 = p_2 - q_1$$

является средней кривизной векторного поля (J_3) или огибаемой им конгруенции линий [1]. Поле векторов

$$J = \frac{dJ_3}{ds} - (\operatorname{div} J_3)\, J_3 = q_3J_1 - p_3J_2 + (p_2 - q_1)\, J_3 \tag{7}$$

я буду называть *полем присоединенных векторов к полю* (J_3).

Внешние силы $\overline{F}$, действующие на жидкость, предполагаем консервативными, т. е. имеющими потенциал U, так что

$$\overline{F}\, d\overline{M} = -dU;$$

величину

$$H = \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U, \tag{8}$$

где V — величина скорости, p — давление, ρ — плотность, назовем полной энергией частицы. Если считать, что J_3 есть направление скорости, т. е. поле (J_3) огибает линии тока, тогда

$$\overline{V} = VJ_3. \tag{9}$$

Пусть двойной вихрь будет

$$2\overline{\omega} = \operatorname{rot} \overline{V} = \omega^\alpha J_\alpha; \tag{10}$$

в таком случае уравнение Громеки — Ламба в моей форме ([2]) представится в виде:

$$dH = \begin{vmatrix} 0 & \omega^1 & \omega_0^1 \\ 0 & \omega^2 & \omega_0^2 \\ V & \omega^3 & \omega_0^3 \end{vmatrix} \tag{11}$$

или в виде

$$dH = V^2 (-b\omega_0^1 + a\omega_0^2), \tag{11*}$$

где $a = \omega^1 / V$, $b = \omega^2 / V$.

Компоненты двойного вихря по данным мною формулам ([2]) определяются условиями:

$$-a\delta = -p_3\delta + \omega_0^1\omega_0^3 \frac{dV}{V}, \quad -b\delta = -q_3\delta + \omega_0^2\omega_0^3 \frac{dV}{V},$$
$$-\frac{\omega^3}{V} = p_1 + q_2; \tag{12}$$

наконец, уравнение неразрывности будет:

$$\omega_0^1\omega_0^2 \frac{dV}{V} + (q_1 - p_2)\,\delta = 0. \tag{13}$$

Из уравнений (12) и (13) мы получим:

$$\frac{dV}{V} = (q_3 - b)\,\omega_0^1 + (a - p_3)\,\omega_0^2 + (p_2 - q_1)\,\omega_0^3. \tag{14}$$

Положим для краткости

$$\omega = \overline{J}\,d\overline{M} = q_3\omega_0^1 - p_3\omega_0^2 + (p_2 - q_1)\,\omega_0^3; \tag{15}$$

тогда предыдущее уравнение представится в виде

$$\frac{dV}{V} = \omega + (-b\omega_0^1 + a\omega_0^2)$$

или в виде

$$\frac{dV}{V} = \omega + \frac{dH}{V^2}. \tag{14*}$$

Итак, основная система гидродинамических уравнений будет состоять из трех уравнений: (11*), (14*) и уравнения

$$-\frac{\omega^3}{V} = p_1 + q_2; \tag{16}$$

в последнем правая часть является геометрическим инвариантом конгруенции линий тока (третья кривизна ([1])).

Дифференцируя внешним образом соотношение (14*), мы получим

$$\omega' - \frac{2}{V^2}\omega\, dH = 0,$$

откуда внешним умножением на ω найдем

$$\omega'\omega = 0; \tag{17}$$

это условие обозначает, что уравнение

$$\omega = 0 \tag{18}$$

вполне интегрируемо, или, иначе говоря, *поле присоединенных векторов допускает семейство ортогональных поверхностей.* Когда поле присоединенных векторов (J) допускает семейство ортогональных поверхностей, то начальное поле (J_3) я называю полуспециальным полем; если же форма ω прямо является полным дифференциалом, т. е. поле (J) есть поле градиентов, то поле (J_3) я называю специальным.

Итак, я доказал, что:

А. *Конгруенция линий токов стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости есть во всяком случае конгруенция полуспециальная.*

Допустим, что указанное условие выполнено и форма ω может быть представлена в виде

$$\omega = \lambda\, d\mu; \tag{19}$$

тогда уравнение (14*) примет вид

$$\lambda V^2 d\mu + d\left(H - \frac{V^2}{2}\right) = 0. \tag{20}$$

Отсюда следует, что

$$\lambda V^2 = -f'(\mu), \quad H - \frac{V^2}{2} = f(\mu), \tag{21}$$

где $f(\mu)$ — пока произвольная функция от μ; итак, уравнение (14*) будет удовлетворено соотношениями (21). Что касается уравнения (11*), то оно даст коэффициенты a и b (определит два первых компонента вихря), если только H и V, определяемые уравнениями (21), удовлетворяют условию

$$dH\omega_0^1\omega_0^2 = 0; \tag{22}$$

это последнее на основании (14*) равносильно условию

$$\left(\frac{dV}{V} - \omega\right)\omega_0^1\omega_0^2 = 0$$

или же

$$\frac{dV}{V}\omega_0^1\omega_0^2 = (p_2 - q_1)\,\delta. \tag{23}$$

Уравнение (22) обозначает, что полная энергия жидкой частицы постоянна вдоль каждой линии тока (В); судя же по уравнению (23), это условие эквивалентно требованию:

В. *Логарифмическая производная от величины скорости по линии тока равна средней кривизне конгруенции линий тока.*

Условия А и В необходимы и достаточны, чтобы конгруенция линий могла быть выбрана за конгруенцию линий тока стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости.

В качестве примера применения полученных результатов поставим вопрос: возможен ли стационарный поток идеальной несжимаемой жидкости по параллельным винтовым линиям, расположенным на параллельных (любых) цилиндрах? Пусть $\overline{M_0}(s)$ будет вектор нормального сечения одного из цилиндров; касательную и нормаль сечения представим в виде

$$\begin{aligned} J' &= i\cos\theta + j\sin\theta, & dJ' &= J''d\theta, \\ J'' &= -i\sin\theta + j\cos\theta, & dJ'' &= -J'd\theta, \end{aligned} \qquad \theta = \theta(s);$$

вектор нормального сечения параллельных цилиндров будет

$$\overline{M_0} - aJ''.$$

Произвольная точка на какой-нибудь винтовой линии изобразится вектором

$$\overline{M} = \overline{M_0} - aJ'' + zk,$$

где $z = s\,\mathrm{tg}\,\varphi + b$, $\varphi = \varphi(a)$; шаг винтовой линии я считаю переменным от цилиндра к цилиндру; величины s, a, b будут параметрами точки. Введем теперь переменный репер для каждой точки $\overline{M}$:

$$J_1 = J'', \quad J_2 = -J'\sin\varphi + k\cos\varphi, \quad J_3 = J'\cos\varphi + k\sin\varphi.$$

Нетрудно подсчитать основные формы:

$$p = -d\varphi, \quad q = \cos\varphi\, d\theta, \quad r = \sin\varphi\, d\theta,$$

$$\omega_0^1 = -da, \quad \omega_0^2 = -\sin\varphi\,(1 + a\theta')\,ds + \left(\mathrm{tg}\,\varphi\, ds + \frac{s\,d\varphi}{\cos^2\varphi} + db\right)\cos\varphi,$$

$$\omega_0^3 = \cos\varphi\,(1 + a\theta')\,ds + \left(\mathrm{tg}\,\varphi\, ds + \frac{s\,d\varphi}{\cos^2\varphi} + db\right)\sin\varphi.$$

Теперь легко получим

$$p_1 = \varphi'(a), \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0,$$

$$q_1 = 0, \quad q_2 = -\frac{\theta'\sin\varphi\cos\varphi}{1 + a\theta'}, \quad q_3 = \frac{\theta'\cos^2\varphi}{1 + a\theta'}.$$

Наша форма ω в данном случае имеет вид:

$$\omega = -\frac{\theta'\cos^2\varphi}{1 + a\theta'}\,da;$$

она, во всяком случае, вполне интегрируема. Итак, *конгруенция параллельных винтовых линий на параллельных цилиндрах во всяком случае — конгруенция полуспециальная; к тому же она минимальная* ([2]).

Далее мы получим:

$$V^2 = \frac{f'(a)\,(1 + a\theta')}{\theta'\cos^2\varphi}, \quad H = \frac{V^2}{2} + f(a);$$

однако условие (23) в данном случае даст

$$\theta'' = 0,$$

т. е. $\theta' = \mathrm{const}$, и наши цилиндры должны быть только круговыми.

Научно-исследовательский институт математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
17 IV 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. С. Бюшгенс, Изв. АН СССР, сер. матем., **10**, № 1, 73 (1946). [2] С. С. Бюшгенс, там же, **12**, № 5, 481 (1948).