Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

С. Г. МИХЛИН

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ, СВЯЗАННЫХ С ФУНКЦИЕЙ ГРИНА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 15 III 1951)

§ 1. Мы рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -g(x_1; x_2), \tag{1}$$

которое надлежит проинтегрировать в области круга $R^2 = x^2 + y^2 < 1$ при краевом условии

$$u\big|_{R=1} = 0. \tag{2}$$

Относительно свободного члена $g(x_1, x_2)$ мы примем, что он квадратично-суммируем в области круга.

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Если и удовлетворяет уравнениям* (1) *и* (2), *то имеет место неравенство*

$$\iint\limits_{R<1} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \, \partial x_m} \right|^2 dx_1 \, dx_2 \leqslant C^2 \iint\limits_{R<1} |g(x_1, x_2)|^2 dx_1 \, dx_2, \quad C = \text{const}. \tag{3}$$

§ 2. Пусть (x_1, x_2) и (ξ_1, ξ_2) — две точки на плоскости, r — расстояние между ними и θ — угол между вектором, идущим от точки (ξ_1, ξ_2) к точке (x_1, x_2), и осью x_1. Пусть, далее, $f(\theta)$ — квадратично-суммируемая функция от θ, свободный член ряда Фурье которой равен нулю, так что

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta}, \quad a_0 = 0. \tag{4}$$

Мною была доказана ([1]) (см. также ([2])) следующая теорема.

Теорема 2. *Интеграл*

$$W(x_1, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\xi_1, \xi_2) \frac{f(\theta)}{r^2} \, d\xi_1 \, d\xi_2, \tag{5}$$

понимаемый в смысле его главного значения по Коши, удовлетворяет неравенству*

* Такие интегралы обычно называют сингулярными.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} | W^2(x_1, x_2) | \, dx_1 dx_2 \leqslant A^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} | U^2(x_1, x_2) | \, dx_1 \, dx_2, \tag{6}$$

где

$$A = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{a_n}{n} \right|. \tag{7}$$

Теорема 2 позволяет трактовать сингулярный интеграл как оператор, определенный на множестве всех функций, квадратично-суммируемых на плоскости (x_1, x_2).

§ 3. Пусть $\varphi(\theta)$ — 2π-периодическая и непрерывно дифференцируемая функция от θ и $U(x_1, x_2)$ — функция, квадратично-суммируемая на всей плоскости. Предполагая достаточную гладкость функции $U(x_1, x_2)$, Ф. Трикоми (3) доказал следующую формулу *:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\xi_1, \xi_2) \frac{\varphi(\theta)}{r} \, d\xi_1 \, d\xi_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\varphi(\theta)}{r} \right] d\xi_1 \, d\xi_2 - U(x_1, x_2) \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\theta) \frac{\partial r}{\partial \xi_k} \, d\theta. \tag{8}$$

Пользуясь теоремой 2, нетрудно доказать, что при наложенных выше на $\varphi(\theta)$ условиях интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U(\xi_1, \xi_2) \frac{\varphi(\theta)}{r} \, d\xi_1 \, d\xi_2$$

имеет квадратично-суммируемые на всей плоскости обобщенные первые производные **, если $U(x_1, x_2)$ сама квадратично-суммируема на плоскости, и эти производные выражаются формулой (8).

§ 4. Функция Грина для круга имеет вид

$$G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{\rho r'},$$

где r' — расстояние от точки (x_1, x_2) до точки с координатами $\xi_1' = \frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \xi_2^2}$; $\xi_2' = \frac{\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ и $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

Применяя формулу (8), легко доказать, что решение уравнения (1) при краевом условии (2) дается обычной формулой

$$u(x_1, x_2) = \iint\limits_{\rho < 1} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) \, g(\xi_1, \xi_2) \, d\xi_1 \, d\xi_2$$

и в том случае, когда g только квадратично-суммируема по кругу $\rho < 1$. Чтобы применить формулу (8), достаточно в интеграле

$$-\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\rho < 1} g(\xi_1, \xi_2) \ln r \, d\xi_1 \, d\xi_2.$$

* Ее обобщение на случай многократного интеграла дано в (2).

** Определение обобщенных производных см., например, в (4).

доопределить функцию $g(\xi_1, \xi_2)$ во внешности круга $\rho \geqslant 1$, положив ее там равной нулю.

Имеем

$$u(x_1, x_2) = v(x_1, x_2) + w(x_1, x_2),$$

где

$$v(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\rho<1} g \ln r \, d\xi_1 \, d\xi_2, \tag{9}$$

$$w(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\rho<1} g \ln r' \, d\xi_1 \, d\xi_2 + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\rho<1} g \ln \rho \, d\xi_1 \, d\xi_2. \tag{10}$$

По формуле (8) легко найти

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{2} g(x_1, x_2) + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\rho<1} g(\xi_1, \xi_2) \frac{\cos 2\theta}{r^2} \, d\xi_1 \, d\xi_2$$

и аналогичные формулы для других вторых производных. Из теоремы 2 следует неравенство

$$\iint\limits_{\rho<1} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right|^2 dx_1 \, dx_2 < \iint\limits_{\rho<1} | g^2(x_1, x_2) | \, dx_1 \, dx_2. \tag{11}$$

Исследуем производные от $w(x_1, x_2)$. В первом интеграле (10) введем в качестве переменных интегрирования ξ_1' и ξ_2'. Обозначая $g(\xi_1, \xi_2) = \widetilde{g}(\xi_1', \xi_2')$, получим $(\rho'^2 = \xi_1'^2 + \xi_2'^2)$:

$$w(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\rho'>1} \frac{\widetilde{g}(\xi_1', \xi_2')}{\rho'^4} \ln r' \, d\xi_1' \, d\xi_2' + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\rho<1} g \ln \rho \, d\xi_1 \, d\xi_2.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\rho'>1} \frac{\widetilde{g}(\xi_1', \xi_2')}{\rho'^4} \frac{\cos 2\theta'}{r'^2} \, d\xi_1' \, d\xi_2',$$

где θ' — угол между вектором, идущим от точки (ξ_1', ξ_2') к точке (x_1, x_2), и осью x_1.

Доопределим $\widetilde{g}(\xi_1', \xi_2')$, полагая $\widetilde{g}(\xi_1', \xi_2') = 0$, если $\rho' \leqslant 1$. Тогда

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{g}(\xi_1', \xi_2')}{\rho'^4} \frac{\cos 2\theta'}{r'^2} \, d\xi_1' \, d\xi_2'. \tag{12}$$

Интеграл (12) имеет смысл и тогда, когда точка (x_1, x_2) лежит вне единичного круга. Обозначая для краткости этот интеграл через $p(x_1, x_2)$, имеем по теореме 2:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} | p^2(x_1, x_2) | \, dx_1 \, dx_2 \leqslant \frac{1}{4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widetilde{g}^2(\xi_1', \xi_2')|}{\rho'^8} \, d\xi_1' \, d\xi_2' =$$

$$= \frac{1}{4} \iint\limits_{\rho'>1} \frac{|\widetilde{g}^2(\xi_1', \xi_2')|}{\rho'^8} \, d\xi_1' \, d\xi_2'. \tag{13}$$

Слева будем интегрировать только по кругу $R<1$, где $p=\partial^2 w/\partial x_1^2$. Справа вернемся к переменным ξ_1 и ξ_2. Мы получим тогда:

$$\iint\limits_{R<1} \left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right|^2 dx_1\, dx_2 \leqslant \frac{1}{4} \iint\limits_{\rho<1} |g^2(\xi_1, \xi_2)|\, \rho^4 d\xi_1\, d\xi_2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4} \iint\limits_{R<1} |g^2(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2. \qquad (14)$$

Из (11) и (14) легко следует неравенство (3) со значением постоянной $C={}^3/_2$ для производной $\partial^2 u/\partial x_1^2$. То же значение имеет эта постоянная для $\partial^2 u/\partial x_2^2$. Для производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_2}$ постоянная $C=1$.

Рассмотрим при том же краевом условии (2) уравнение

$$\Delta u + \varepsilon L_2 u = -g(x_1, x_2), \qquad (15)$$

где $L_2 u$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка с измеримыми и ограниченными коэффициентами и ε — малый численный параметр. Пользуясь теоремой 1, легко доказать, что интеграл уравнения (15), удовлетворяющий условию (2), существует и разлагается в ряд по положительным степеням ε. Этот ряд сходится равномерно по x_1 и x_2 в круге $R\leqslant 1$; ряды первых и вторых производных сходятся в этом круге в среднем.

Отметим, что сходимость в среднем самого ряда по степеням ε и рядов первых производных можно доказать для эллиптических уравнений весьма общего вида, при широких допущениях относительно характера области и при любом числе независимых переменных. Такое доказательство можно получить, например, исходя из рассуждений Л. В. Канторовича ([5], гл. III, § 3).

§ 5. Не представляет труда распространить основные результаты этой заметки на некоторые другие случаи. Укажем, в частности, случай, когда круг заменяется многомерным шаром, а также, если число независимых переменных равно двум, на случай произвольного эллиптического уравнения второго порядка и произвольной конечной односвязной области, если коэффициенты уравнения и граница области достаточно гладкие.

Поступило
7 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, ДАН, 15, № 8 (1937). [2] С. Г. Михлин, Усп. матем. наук, 3, в. 3 (25) (1948). [3] F. Tricomi, Math. Zs., 27, 87 (1928). [4] С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950 [5] Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, 3, в. 6 (28) (1948).