Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. Д. МАЛЮЖИНЕЦ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ О ВЫНУЖДЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком В. А. Фоком 12 III 1951)

Для формулировки задачи о вынужденных гармонических колебаниях, поддерживаемых источником в некоторой области, применяются принцип излучения и принцип погашаемости. В основу этих принципов положены различные, хотя и связанные между собой черты, присущие физическому явлению вынужденных колебаний. Первый принцип основан на том обстоятельстве, что поле на бесконечном расстоянии от источника имеет характер уходящих волн*. Второй же связан с тем, что наличие потерь в среде приводит к гашению поля.

Недостатками принципа излучения являются: во-первых, невозможность с его помощью получить единую формулировку задачи о вынужденных колебаниях, охватывающую случаи как ограниченной, так и бесконечной области; во-вторых, затруднительность общей математической формулировки этого принципа для бесконечных областей в случае, когда граница области содержит бесконечно удаленные точки.

Первоначальная математическая формулировка принципа погашаемости [3] сводилась к тому, что, например, при решении краевой задачи для уравнения $\Delta u + k^2 u = F$ с вещественным параметром k сперва отыскивалось решение, обращающееся в нуль или ограниченное в бесконечности, при условии, что k обладает сколь угодно малой мнимой частью, которая затем устремлялась к нулю. В таком виде принцип погашаемости еще не пригоден для постановки общей задачи о вынужденных колебаниях, так как не охватывает, например, случая, когда часть области представляет собой бесконечно суживающийся рупор с жесткими стенками.

Универсальный и удобный вид принципу погашаемости придан В. А. Фоком [4], постоянно применяющим этот принцип в своих работах по теории диффракции. Метод Фока состоит в том, что некоторая краевая задача для уравнения $\Delta u + k^2 u = F$ решается сперва для чисто мнимого значения параметра k. Затем полученное решение аналитически продолжается в комплексной плоскости k до нужного, например вещественного, значения этого параметра. Ниже, пользуясь принципом погашаемости, мы даем общую формулировку задачи о вынужденных гармонических колебаниях в произвольной области и доказываем теорему единственности [5].

---

* Это справедливо для сред, в которых направления распространения энергии и фазы совпадают. Существуют, хотя и реже встречаются, среды, для которых эти направления противоположны. Тогда поле в бесконечности должно, наоборот, иметь характер приходящих волн [1, 2].

Достаточно сформулировать задачу о нахождении функций Грина в соответствующих краевых задачах, иначе говоря, сформулировать задачу о вынужденных колебаниях, возбуждаемых единичным источником. Мы ограничиваемся случаем скалярного волнового поля.

Пусть в трехмерном пространстве дана связная область G с кусочно-гладкой границей Γ. Определим в ней расстояние $\rho(P, P')$ между двумя точками P и P' как абсолютный минимум длины нити, натянутой между этими точками и целиком расположенной в $G+\Gamma$.

Введем в рассмотрение функцию $v(P;\ \lambda)$, с помощью которой определим далее вынужденное колебание.

Подчиним $v(P;\ \lambda)$ следующим требованиям:

1) В области G функция $v(P;\ \lambda)$ удовлетворяет уравнению $\Delta v + \lambda v = -4\pi\delta(P-Q)$, где $\delta(P-Q)$ — трехмерная дельта-функция, так что в точке $Q \in G$ функция $v(P;\ \lambda)$ имеет единичную особенность, а в остальных точках области удовлетворяет однородному уравнению $\Delta v + \lambda v = 0$.

2) На границе Γ функция $v(P;\ \lambda)$ удовлетворяет одному из краевых условий: $v=0$, $\partial v / \partial n = 0$ или $\partial v / \partial n + h(\lambda)\, v = 0$. Здесь n — внешняя нормаль и h — аналитическая функция параметра λ и кусочно-непрерывная функция точки на Γ. В угловых точках границы Γ, а также в точках разрыва функции h функция $v(P;\ \lambda)$, если она существует для данного значения λ, непрерывна и однозначна, так что предел в подобной точке не зависит от пути, принадлежащего $G+\Gamma$.

3) В любой фиксированной точке P, принадлежащей $G+\Gamma$ и не совпадающей с Q, величина $v(P;\ \lambda)$ является мероморфной аналитической функцией параметра λ в области $-\varepsilon < \arg\lambda < 2\pi + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, $|\lambda| > 0$ *.

4) В области $|\lambda| > 0$, $\pi/2 < \arg\lambda < 3\pi/2$ существует содержащая предельную точку последовательность значений λ_n, не являющихся полюсами для функции $v(P;\ \lambda)$, для которых: а) в случае третьего краевого условия $\operatorname{Re} h(\lambda_n) > 0$ всюду на границе; б) если область $G+\Gamma$ содержит бесконечно удаленные точки, то $\lim\limits_{\rho(P,Q)\to\infty} v(P;\ \lambda) = 0$ **.

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема. *Для заданной области и одного из указанных краевых условий не существует более одной функции $v(P;\ \lambda)$, удовлетворяющей перечисленным требованиям.*

Доказательство. Докажем сперва единственность для значения $\lambda = \lambda_n$. Предположим, что краевое условие имеет вид $\partial v/\partial n + hv = 0$, где $\operatorname{Re} h > 0$, поскольку $\lambda = \lambda_n$. Если существуют две различных функции $v(P; \lambda_n)$, то их разность $v'(P; \lambda_n)$ должна удовлетворять этому краевому условию на границе и уравнению $\Delta v' + \lambda_n v' = 0$ в каждой внутренней точке области.

Воспользуемся следующей, ранее доказанной нами теоремой ([6]). Если функция v' удовлетворяет уравнению $\Delta v' + \lambda_n v' = 0$ в каждой точке области и на кусочно-гладкой границе краевому условию $\partial v'/\partial n + hv' = 0$, где h — кусочно-непрерывная функция, причем в особых точках границы функция v' однозначна и непрерывна, то при условии $\operatorname{Re}\lambda_n < 0$ модуль функции v' не может иметь максимума внутри области, а если при этом $\operatorname{Re} h > 0$, то и на границе. При условии $\operatorname{Re} h > 0$, если функция v' не есть тождественной нуль, то в

* Можно ограничиться требованием мероморфности лишь при $0 < \arg\lambda < 2\pi$, $|\lambda| > 0$, если дополнительно потребовать существования предела почти для всех точек, соответствующих $\arg\lambda = 0$ и $\arg\lambda = 2\pi$.

** Можно привести примеры (область содержит бесконечно суживающуюся часть при краевом условии $\partial v/\partial n = 0$), показывающие, что если потребовать обращения в нуль в бесконечно удаленных точках при λ_n, расположенном в первом или четвертом квадранте, то функция $v(P; \lambda)$ могла бы не существовать.

окрестности любой точки границы найдутся точки, принадлежащие области G, в которых значение модуля функции больше, чем в точке границы.

Из этой теоремы в случае ограниченной области сразу следует что $|v'(P;\lambda_n)| \equiv 0$. Для неограниченной области то же самое следует, если дополнительно воспользоваться условием $\lim\limits_{\rho(P;\,Q)\to\infty} |v'(P;\lambda_n)| = 0$.

Поскольку функция $v'(P;\lambda)$ обращается в нуль на всей последовательности λ_n, содержащей предельную точку, эта функция равна нулю тождественно. Следовательно, двух различных функций $v(P;\lambda)$ существовать не может, и теорема для краевого условия третьего рода доказана.

Полагая $1/h = 0$, получаем аналогичную теорему для краевого условия $v = 0$, которую можно доказать тем же способом и непосредственно. Теорема для краевого условия $\partial v/\partial n = 0$ получается в пределе при $h \to 0$.

Заметим, что для неограниченной области условие $\lim\limits_{\rho(P;\,Q)\to\infty} v(P;\lambda_n) = 0$ является слишком сильным. Например, в случае внешних областей (когда поверхность Г не содержит бесконечно удаленных точек) легко показать с помощью теоремы о среднем значении функции v на поверхности сферы, что указанное условие следует из более слабого требования равномерной ограниченности функции $v(P;\lambda_n)$ при $\rho(P;Q) > \varepsilon$. В. А. Фок в своих работах пользуется как раз подобным требованием. Вероятно, можно доказать и в общем случае достаточность требования ограниченности для обеспечения единственности функции $v(P;\lambda)$.

Теперь, пользуясь рассмотренной функцией $v(P;\lambda)$, дадим определение вынужденного колебания, возбуждаемого единичным источником в произвольной области.

Пусть волновое поле в области G удовлетворяет уравнению $\Delta u + \lambda^* u = -4\pi\delta(P-Q)$ и на границе одному из краевых условий: $u = 0$, $\partial u/\partial n = 0$, $\partial u/\partial n - i\sqrt{\lambda^*} g u = 0$, где λ^* — комплексное число, расположенное в области $|\lambda| > 0$; $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant 2\pi$, и g — кусочно-непрерывная функция точки такая, что $\operatorname{Re} g > 0$ *. Тогда вынужденное колебание $u(P)$ определяется через соответствующую функцию $v(P;\lambda)$ как $u(P) = v(P;\lambda^*)$. При этом функция h в случае третьего краевого условия определяется как $h = -i\sqrt{\lambda^*}\, g$ $(\sqrt{\lambda} = |\sqrt{\lambda}| \exp {}^1/_2 (i \arg\lambda))$.

Дополнительный вопрос возникает в случае, если λ^* есть вещественное положительное число. На интересующем нас листе $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant 2\pi$ римановой поверхности для функции $v(P;\lambda)$ ** это может соответствовать двум точкам: $\lambda^* = |\lambda^*| e^{0i}$ и $\lambda^* = |\lambda^*| e^{2\pi i}$. Выбор той или другой определяется, с одной стороны, принятой зависимостью гармонического колебания от времени (согласно множителю $e^{-i\omega t}$ или $e^{i\omega t}$) и, с другой стороны, тем, совпадают ли в данной среде и при данной частоте ω направления распространения энергии фазы (положительная фазовая скорость) или эти направления противоположны (отрицательная фазовая скорость) [2]. Если, как бывает в большинстве случаев, фазовая скорость положительна, то следует брать значение $u(P) =$

---

* В акустике краевое условие $\partial u/\partial n - i\sqrt{\lambda^*} g u = 0$ соответствует поглощающей поверхности, характеризуемой нормальным импедансом z_0/g [7], где z_0 — волновое сопротивление среды, заполняющей область G. Для электродинамики оно есть частный случай краевых условий М. А. Леонтовича [8]. Условием $\operatorname{Re} g > 0$ исключается физически нереальный случай $\operatorname{Re} g < 0$, когда граница не поглощает энергию, а отдает дополнительную

** Ввиду того, что любая точка листа $0 \leqslant \arg\lambda \leqslant 2\pi$ римановой поверхности для $v(P;\lambda)$ может представлять значение параметра λ^* для какой-нибудь реальной колебательной среды, можно называть этот лист «физическим листом».

$= v(P; |\lambda^*| e^{0i})$ в случае множителя $e^{-i\omega t}$ и $u(P) = v(P; |\lambda^*| e^{2\pi i})$ в случае множителя $e^{i\omega t}$. При отрицательной фазовой скорости нужно поступить противоположным образом.

Поступило
4 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Мандельштам, ЖЭТФ, 15, 475 (1945). [2] Г. Д. Малюжинец, ЖТФ, № 5 (1951). [3] W. S. Ignatowsky, Ann. d. Phys., 18 (1905). [4] В. А. Фок и В. Р. Бурсиан, ЖРФХО (часть физическая), 58, стр. 356 (1926); В. А. Фок, Ann. d. Phys., 17, 401 (1933). [5] Г. Д. Малюжинец, Диссертации, ФИАН, 1951. Автореферат, изд. АН СССР. [6] Г. Д. Малюжинец, ДАН, 78, № 2 (1951). [7] Л. М. Бреховских, УФН, 39, 4 (1947). [8] М. А. Леонтович, Ст. в сборн. Новейшие исследования распространения радиоволн, 2, изд. АН СССР, 1948.