Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Ю. К. БЕРГНЕР

К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ

(Представлено академиком В. А. Фоком 23 III 1951)

В работе исследуется распространение волн вдоль взаимодействующих электронных потоков, движущихся с разными средними скоростями u_s и имеющих, кроме того, скорости теплового движения при разных значениях параметров задачи. До сих пор [1,2] не учитывалось тепловое движение электронов и выводы относились к частным значениям параметров задачи.

Основные уравнения для гармонически колеблющихся электронных потоков имеют вид [3]

$$-i\omega f + u\frac{\partial f}{\partial x} - \eta\frac{d\varphi}{dx}\frac{df_0}{du} = 0, \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi e\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,du. \tag{1}$$

Здесь $\eta = e/m$ — удельный заряд электрона, ω — частота процесса, f и φ — малые отклонения функции распределения и потенциала от равновесных значений.

Равновесную функцию распределения примем в виде

$$f_0(u) = \sum_{s=1}^{n} n_s\left(\frac{m}{2\pi\theta_s}\right)^{1/2} e^{-\frac{m}{2\theta_s}(u-u_s)}, \tag{2}$$

где θ_s — абсолютная температура, n_s — число электронов, движущихся с постоянной скоростью u_s в единице объема, n — число потоков.

Для решения системы (1) с помощью преобразования Лапласа, примененного, в отличие от [4], не ко времени, а к координате x, положим

$$\chi(\gamma) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma x}\varphi(x)\,dx, \quad w(\gamma, u) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma x} f(u, x)\,dx. \tag{3}$$

Предполагая $\varphi(0) = f(0, u) = 0$, получаем из (1)

$$\chi(\gamma) = -\frac{E_0}{\Delta(\gamma)}, \quad w(u, \gamma) = -\frac{\eta\gamma E_0 df_0/du}{(u\gamma - i\omega)\Delta(\gamma)},$$

$$E_0 = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=0}, \quad \Delta(\gamma) = \gamma^2 + 4\pi e\eta\gamma\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{df_0}{du}\frac{du}{u\gamma - i\omega}. \tag{4}$$

Подставляя $f_0(u)$ из (2) в $\Delta(\gamma)$, получим

$$\Delta(\gamma) = \gamma^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{s=1}^{n} \frac{I(z_s)}{\Gamma_s^2}\right), \quad \text{где} \quad I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{de^{-x^2/2}/dx}{x-z}\,dx,$$

$$z_s = \frac{i\omega - \gamma u_s}{\gamma v_{Ts}}, \quad \Gamma_s = \gamma a_s, \quad a_s = \frac{v_{Ts}}{\omega_s}, \quad v_{Ts}^2 = \frac{\theta_s}{m}, \quad \omega_s^2 = 4\pi e\eta n_s. \tag{5}$$

Функции $\chi(\gamma)$ и $w(u, \gamma)$ определены в правой полуплоскости γ, а так как по (5) $\operatorname{sign} \operatorname{Im} z_s = \operatorname{sign} \mathrm{R}\,\gamma$, то

$$\frac{1}{x-z} = i\int_0^{\infty} e^{-i\tau(x-z)}\,d\tau. \tag{6}$$

Из (5) и (6) получаем выражение для $I(z)$:

$$I(z) = i\int_0^{\infty} e^{i\tau z}d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x}\frac{de^{-x^2/2}}{dx}\,dx = 2i\sqrt{\pi}\,\frac{d}{dz}\left\{e^{-z^2/2}\int_{-iz/\sqrt{2}}^{\infty - iz/\sqrt{2}} e^{-\xi^2}d\xi\right\} =$$
$$= i\pi\frac{d}{dz}\left\{e^{-z^2/2}\left[1 + \Phi\left(\frac{iz}{\sqrt{2}}\right)\right]\right\}, \tag{7}$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2}d\xi$.

Функция $I(z)$ целая и является аналитическим продолжением $I(z)$, определенного лишь для $\operatorname{Im} z > 0$. При $|z| \gg 1$ получаем:

$$I(z) \sim \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^4} + \frac{15}{z^6} + \ldots\right). \tag{8}$$

Оставляя в (8) лишь первый член справа, имеем для $\Delta(\gamma)$

$$\Delta(\gamma) \sim \gamma^2\left(1 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\omega_s^2}{(i\omega - \gamma u_s)^2}\right). \tag{9}$$

Уравнение $\Delta(\gamma) = 0$, определяющее поведение f и φ, совпадает с аналогичным уравнением из [1,2].

В следующем приближении имеем:

$$\Delta(\gamma) \sim \gamma^2\left(1 + \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\omega_s^2}{(i\omega - \gamma u_s)^2} + \frac{3\gamma^2\omega_s^2 v_{Ts}^2}{(i\omega - \gamma u_s)^4}\right]\right). \tag{10}$$

Это приближение учитывает тепловое движение электронов.

Для решения дисперсионного уравнения $\Delta(\gamma) = 0$ во «внетепловом» приближении (9) в случае двух потоков положим

$$\gamma = i\left(\frac{\omega}{v} + \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\,\xi\right), \quad |\operatorname{Re}\gamma| = \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\,|\operatorname{Im}\xi|. \tag{11}$$

Здесь $v = \frac{u_1 u_2}{u}$, $u = \frac{u_1 + u_2}{2}$, $\Gamma_s = \omega_s / u_s$.

Введем два параметра:

$$\alpha = \frac{\omega\delta}{u_1 u_2 \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2}}, \quad \beta = \Gamma_1 / \Gamma_2, \quad \text{где} \quad \delta = \frac{u_2 - u_1}{2}. \tag{12}$$

Уравнение $\Delta(\gamma) = 0$ превращается в уравнение для ξ

$$\xi^4 + a\xi^2 + b\xi + c = 0. \tag{13}$$

Здесь $a = -\left(2\alpha^2 + \beta + \frac{1}{\beta}\right)$, $b = 2\alpha\left(\frac{1}{\beta} - \beta\right)$, $c = \alpha^2\left[\alpha^2 - \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\right]$.

Корни последнего уравнения выражаются через корни вспомогательного кубического уравнения ([2,5])

$$X^3 - \frac{3}{4} m^2 X + \frac{\alpha^2 - m^3}{4} = 0, \tag{14}$$

где $m = \frac{2}{3}\left(\alpha^2 - \frac{\rho}{4}\right)$, $\rho = \beta + \frac{1}{\beta}$.

Корни (14) имеют вид

$$X_1 = A_1 + A_2,$$

$$X^{2,3} = -\frac{A_1 + A_2}{2} \pm \pm i\sqrt{3}\,\frac{A_1 - A_2}{2}, \tag{15}$$

$$\left.\begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\{(m^3 - \alpha^2) \pm \pm \sqrt{\alpha^2(\alpha^2 - 2m^3)}\}^{1/3}.$$

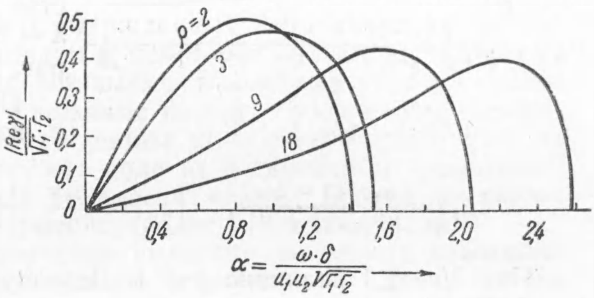

Рис. 1

Корни (13) выражаются через корни (14) следующим образом:

$$\xi_s = \begin{cases} \sqrt{\zeta_1} \pm (\sqrt{\zeta_3} + \sqrt{\zeta_2}), \\ -\sqrt{\zeta_1} \pm (\sqrt{\zeta_3} - \sqrt{\zeta_2}), \end{cases} \quad \text{где} \quad \zeta_{1,2,3} = X_{1,2,3} - m + \alpha^2, \quad \beta > 1. \tag{16}$$

При $\beta < 1$ в первой скобке (16) сумма меняется на разность, а во второй — разность на сумму.

Анализ (13) показывает, что $\operatorname{Im}\xi \neq 0$ ($\operatorname{Re}\gamma \neq 0$), если (14) имеет два сопряженных корня, так что $\zeta_2 = \overline{\zeta_3}$. При этом $|\operatorname{Im}\xi| = \left|\sqrt{\zeta_2} - \sqrt{\zeta_3}\right|$. В этом случае соблюдается неравенство $\alpha^2 > 2m^3$, определяющее верхнюю границу значений α (для заданного ρ), при которых происходит нарастание колебаний. Максимум $|\operatorname{Im}\xi|$ при заданном ρ достигается при некотором конечном $\alpha = \alpha_0(\rho)$ (рис. 1).

Соответствующая частота определяется из (12):

$$\omega_0 = \frac{u_1 u_2}{\delta}\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2}\,\alpha_0(\rho). \tag{17}$$

$|\operatorname{Im}\xi|$ имеет наибольший максимум при $\rho = 2$ ($\beta = 1$). При этом из (13) имеем

$$|\operatorname{Im}\xi| = \sqrt{\sqrt{4\alpha^2 + 1} - (\alpha^2 + 1)}. \tag{18}$$

Максимум этой величины достигается при $\alpha = \sqrt{3}/2$ и равен 0,5. На высоких частотах обычно $\omega_0 \gg (\omega_1\omega_2)^{1/2}$. Из (17) следует, что при этом $\frac{\delta}{(u_1 u_2)^{1/2}} \cong \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} \ll 1$. Однако последнее отношение не может быть слишком малым, так как при этом сильно возрастают его относительные флуктуации из-за теплового движения, а следовательно, и флуктуации ω_0, создающие дополнительные нерегулярные колебания. Чтобы избежать этого, нужно потребовать, чтобы тепловые скорости электронов $v_T \ll \frac{u_2 - u_1}{2}$.

Используя формулу (4), получаем, что при больших x

$$\varphi(x) \sim -E_0 \frac{e^{\gamma_0 x}}{\Delta'(\gamma_0)}, \tag{19}$$

где γ_0 — тот корень уравнения $\Delta(\gamma) = 0$, для которого $\mathrm{Re}\,\gamma_0 > 0$.

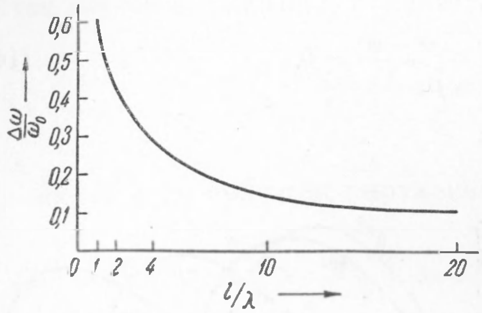

Рис. 2

Квадрат амплитуды колебаний $|\varphi(x)|^2$ спадает вдвое от своего максимума, соответствующего ω_0 (при фиксированном x), в некотором интервале частот $\Delta\omega$.

Величина $\Delta\omega/\omega_0 = \Delta\alpha/\alpha_0$ как функция l/λ (l — длина пространства взаимодействия потоков, $\lambda = 2\pi/\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}$) представлена на рис. 2 ($\rho = 2$, $\alpha_0 = \sqrt{3/2}$).

Подставляя (11) в выражение z_s из (5), получим:

$$|z_1| = \frac{u_1\delta}{uv_{T1}} \frac{|1 - \xi/\alpha|}{|1 + x|}, \qquad |z_2| = \frac{u_2\delta}{uv_{T2}} \frac{|1 + \xi/\alpha|}{|1 + x|}, \qquad x = \frac{\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}}{\omega} v\xi.$$

При $\delta/u \ll 1$ величина $x \ll 1$. Поэтому в интервале значений α и ρ, соответствующих нарастанию волны, неравенство $|z_s| \gg 1$ будет выполнено при $\delta/v_{T1,2} \gg 1$.

Это условие применимости внетеплового приближения совпадает с условием отсутствия сильных флуктуаций.

Дисперсионное уравнение А. И. Ахиезера и Я. Б. Фейнберга [6] получается из (10) при $u_2 = 0$ и $v_{T2} \gg v_{T1}$.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Л. Э. Гуревичу за постоянный интерес к работе и ценные советы.

Поступило
28 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. V. Haeff, P. I. R. E., **37**, 4 (1949). [2] L. S. Nergaard, RCA Rev., **9**, 585 (1948). [3] А. А. Власов, ЖЭТФ, **8**, 291 (1938). [4] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, **16**, 574 (1946). [5] Окунев, Высшая алгебра, 1949. [6] А. И. Ахиезер и Я. Б. Фейнберг, ДАН, **69**, 555 (1949).