Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Г. КОРЕНЕВ

ОБ ИЗГИБЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛИТЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 24 III 1951)

В этой заметке рассматриваются некоторые задачи об изгибе неограниченной плиты, имеющей постоянную толщину и лежащей на упругом основании. Полученные результаты дают решение задачи об изгибе плиты нагрузками, действующими по площади кругового кольца, в частности, для некоторых новых моделей упругого основания.

Расположим координатные оси x, y в средней плоскости плиты; обозначим $w(x, y)$ прогиб плиты и равный ему прогиб основания; $p(x, y)$ — давление, передаваемое на основание; $q(x, y)$ — нагрузку, перпендикулярную к средней плоскости и действующую на плиту; w, p и q будем считать положительными, если они направлены вниз.

Если к основанию в точке (ξ, η) приложена единичная сила $P=1$, то прогиб в точке (x, y) равен $w(x, y) = K^*(x-\xi, y-\eta)$, где функция K^* — ядро, зависящее от свойств упругого основания.

Наиболее важны для приложений ядра $K^*(x-\xi, \ y-\eta) = K(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2})$, которые и будут здесь рассматриваться.

Можно показать, что если $p(x, \ y) = b\cos\alpha x\cos\beta y$, то $w = bc\cos\alpha x\cos\beta y$, где

$$c = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\alpha x\cos\beta y K(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy. \tag{1}$$

Этот интеграл можно ([1], [2]) представить в виде

$$c = 2\pi\int_0^{\infty} rK(r)\,J_0(\gamma r)\,dr, \tag{2}$$

где $\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Отсюда сразу следует, что решением дифференциального уравнения изгиба плиты, равномерно растянутой усилиями p_0,

$$D\Delta\Delta w - p_0\Delta w = q - p, \tag{3}$$

при $q = a\cos\alpha x\cos\beta y$ будет

$$w = \frac{ac\cos\alpha x\cos\beta y}{1+p_0(\alpha^2+\beta^2)+cD(\alpha^2+\beta^2)^2}. \tag{4}$$

Если на плиту действует нагрузка $q = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y$, то

$$w = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{mn} c_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y}{1 + p_0 (\alpha_m^2 + \beta_n^2) + c_{mn} D (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}. \tag{5}$$

Переходя отсюда к задаче о плите, загруженной сосредоточенной силой P, получим,

$$w(r) = \frac{P}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{c\gamma J_0(\gamma r)\, d\gamma}{1 + p_0\gamma^2 + cD\gamma^4}. \tag{6}$$

Переход от решения (5) к формуле (6) проводится обычным путем; эту формулу можно было вывести также введя с самого начала полярные координаты.

В случае $p_0 = 0$ формула (6) широко известна для некоторых моделей упругого основания, а именно для упругого однородного изотропного полупространства, упругого слоя и модели коэффициента постели.

Приведем несколько примеров функций K, для которых можно, представив решение в форме (5), получить довольно простые выражения для c.

Каждое из введенных ниже ядер зависит от двух параметров B и δ, распоряжаясь которыми можно лучше приблизить ядра к тем, которые получаются из экспериментальных данных. О целесообразности введения новых моделей основания при рассмотрении задачи о неограниченной плите говорят многочисленные предложения по введению новых моделей основания, о некоторых из них мы упомянем ниже.

Положив в (6) $p_0 = 0$, $D = 0$, $p = 1$, получим:

$$K(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} c\gamma J_0(\gamma r)\, d\gamma; \tag{7}$$

эту формулу можно получить с помощью теоремы Фурье — Бесселя из (2).

Воспользовавшись формулами (7), (2) и известными несобственными интегралами, приведенными в ([2]), можно показать, что

$$\text{если } K(r) = \frac{B}{\sqrt{r^2 + \delta^2}}, \quad \text{то } c(\gamma) = \frac{2\pi B}{\gamma} \exp(-\delta\gamma); \tag{8}$$

$$\text{если } K(r) = \frac{B}{2\delta^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\delta^2}\right), \text{ то } c(\gamma) = 2\pi B \exp(-\delta^2\gamma^2); \tag{9}$$

$$\text{если } K(r) = BK_0(r\delta), \quad \text{то } c = \frac{2\pi B}{\gamma^2 + \delta^2}, \tag{10}$$

где K_0 — цилиндрическая функция мнимого аргумента (функция Макдональда).

Заметим, что если $K(r) = \Psi_1(r)/2\pi$, $c(\gamma) = 2\pi\Psi_2(\gamma)$, то из соотношений (2), (7) следует

$$c = \frac{1}{2\pi} \Psi_1(\gamma) \quad \text{при } K = \frac{1}{2\pi} \Psi_2(r). \tag{11}$$

Так например, из (8) следует, что

$$\text{при } K(r) = \frac{B}{2\pi r}\exp(-\delta r) \qquad c = \frac{B}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}, \tag{12}$$

а из (10) можно получить

$$\text{для } K(r) = \frac{B}{2\pi(r^2+\delta^2)} \qquad c = BK_0(\delta\gamma). \tag{13}$$

Если в (8) положить $\delta = 0$, $B = \frac{1-\nu^2}{\pi E}$, где E — модуль деформации, а ν — коэффициент Пуассона основания, то мы придем к задаче о плите, лежащей на упругом однородном изотропном полупространстве.

Отметим, что ядро (10) имеет ясный физический смысл, представляя основную функцию влияния для мембраны, лежащей на упругом, в смысле гипотезы коэффициента постели, основании. Таким образом, эта функция соответствует мембранной модели, предложенной М. М. Филоненко-Бородич.

В последнее время Г. К. Клейн сделал ряд предложений по учету непрерывного изменения по глубине модуля деформации грунта. В частности, им предлагались ядра типа $K(r) = Br^{-\delta}$. Нетрудно показать, что для этих ядер

$$c(\gamma) = 2\pi\int_0^\infty Br^{-\delta}rJ_0(\gamma r)\,dr = \pi B\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\delta-2}\frac{\Gamma\left(1-\frac{\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

при $1{,}5 < \delta < 2$, $\gamma \neq 0$.

В некоторых задачах целесообразно вводить комбинированную модель, считая, что на основании, свойства которого определяются ядром K, находится система пружин с квази-упругим коэффициентом k_0 (такие модели предлагались И. Я. Штаерманом, Б. Н. Жемочкиным и А. П. Синицыным [3]). В этом случае формула (6) принимает вид:

$$w(r) = \frac{P}{2\pi}\int_0^\infty \frac{C\gamma J_0(\gamma r)\,d\gamma}{1+p_0\gamma^2+cD\gamma^4+\frac{D}{k_0}\gamma^4}, \quad \text{где } C = c + \frac{1}{k_0}. \tag{14}$$

Для того чтобы учесть инерционные силы, возникающие в плите при вынужденных колебаниях, вызванных силой $p\cos\omega t$, взамен k_0 в (14) нужно ввести величину $k_* = k_0 - h\rho\omega^2$, где ρ — плотность, ω — круговая частота.

В задачах, где моделью грунта служит упругое полупространство, неоднородное по глубине, определение c требует предварительного интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка.

Рассмотрим нагрузку силами q, распределенными по круговой области.

Рассматривая (14) как основную функцию влияния, получим:

$$w(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{q(R,\theta_1)\,C\gamma J_0(\gamma z)\,R\,dR\,d\theta_1 d\gamma}{1+p_0\gamma^2+cD\gamma^4+\frac{D}{k_0}\gamma^4}, \tag{15}$$

где r, θ; R, θ_1 — полярные координаты, $z = \sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\theta_1)}$.

Если на плиту действует по окружности радиуса R нагрузка $q \cos n\theta_1$, то, воспользовавшись формулой сложения бесселевых функций, получим:

$$w = \varepsilon_n q \cos n\theta \int_0^\infty \frac{C\gamma J_n(\gamma R) J_n(\gamma r) R \, d\gamma}{1 + p_0\gamma^2 + cD\gamma^4 + \frac{D}{k_0}\gamma^4}, \tag{16}$$

где $\varepsilon_n = 1$ при $n \neq 0$, $\varepsilon_n = 1/2$ при $n = 0$.

Интегрируя (16), можно легко получить решение задачи о нагрузке $q = \psi_n(R) \cos n\theta_1$, действующей по площади кругового кольца с радиусами R_2, R_1:

$$w = \varepsilon_n q \cos n\theta \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\infty \frac{C\gamma \psi_n(R) J_n(\gamma r) J_n(\gamma R) R \, dR \, d\gamma}{1 + p_0\gamma^2 + cD\gamma^4 + \frac{D}{k_0}\gamma^4}. \tag{17}$$

Положим, что $\psi_n(R) = A_n R^n$, тогда

$$w = \varepsilon_n A_n \cos n\theta \int_0^\infty \frac{C J_n(\gamma r) [J_{n+1}(\gamma R_2) - J_{n+1}(\gamma R_1)] \, d\gamma}{1 + p_0\gamma^2 + cD\gamma^4 + \frac{D}{k_0}\gamma^4}. \tag{18}$$

Заметим, что при основании, следующем гипотезе коэффициента постели, (16), (17), (18) дают другую форму решений, полученных автором в [4].

Для основания по модели М. М. Филоненко-Бородич функция влияния и интегралы (16), (17), (18) сводятся к функциям Бесселя комплексного аргумента.

Центральный научно-исследовательский институт промышленных сооружений

Поступило 20 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 1948. [2] Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, 1949. [3] Б. Н. Жемочкин и А. П. Синицын, Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании без гипотезы Винклера, 1947. [4] Б. Г. Коренев, Сборн. Исследовательские работы по инженерным конструкциям, в. 1, 1948.