

П. Ф. ФИЛЬЧАКОВ

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ШПУНТОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 26 III 1951)

1. Гидродинамический расчет подземного контура плотины, расположенной на проницаемом основании, в большинстве случаев может быть выполнен только приближенными методами.

При конечной глубине T водопроницаемого слоя широко применяется метод фрагментов Н. Н. Павловского⁽⁴⁾. Однако погрешность метода фрагментов растет вместе с ростом T и при $T = \infty$ он неприменим. Уточнения, сделанные в методе фрагментов для $T = \infty$ В. С. Козловым⁽¹⁾, широкого распространения не получили.

Поэтому в данной заметке мы ограничимся только случаем бесконечного водопроницаемого грунта ($T = \infty$), хотя излагаемый метод применим и при $T < \infty$.

Идея метода последовательного конформного отображения шпунтов была сообщена М. А. Лаврентьевым в 1934 г. В. С. Козлову, который и применил ее к решению трехшпунтового флютбета⁽¹⁾. Но Козлов получил громоздкие формулы, так как в качестве исходного флютбета им был взят не одношпунтовый, а двухшпунтовый флютбет. Метод последовательного отображения шпунтов изложен также в работах^(3, 5, 6).

2. Будем искать (при $T = \infty$) функцию $\zeta = f(z)$, конформно отображающую область флютбета z (рис. 1) на вспомогательную полуплоскость ζ , т. е. на область флютбета плоского, для которого решение известно.

Функцию $f(z)$ определим при помощи двух отдельных шагов.

В первом шаге к границе области z причисляем только шпунт s_1 , рассматривая шпунт s_2 как внутреннюю линию области. Функция

$$\omega = \sqrt{1 + \left(\frac{z}{s_1}\right)^2} \quad (1)$$

отобразит область z на полуплоскость $\omega = \lambda + i\mu$ с одним криволинейным разрезом s_2^* , в который переходит шпунт s_2 .

Положив в (1) $z = b + iy$ ($0 \leq y \leq s_2$), получим параметрическое уравнение шпунта s_2^* .

$$\lambda^2 = \frac{\sqrt{M^2 + 4b^2y^2} + M}{2s_1^2}, \quad (2)$$

$$\lambda\mu = \frac{by}{s_1^2}, \quad (3)$$

где обозначено

$$M = s_1^2 + b^2 - y^2. \quad (4)$$

В частности, при $y=0$ и $y=s_2$ находим координаты $(\lambda_4 = \sqrt{1 + (\frac{b}{s_1})^2}; \mu_4 = 0)$ и $(\lambda_5; \mu_5)$ точек 4 и 5 шпунта s_2^* .

Разность $\varepsilon = \lambda_4 - \lambda_5 \geq 0$ характеризует степень искривления шпунта s_2^*

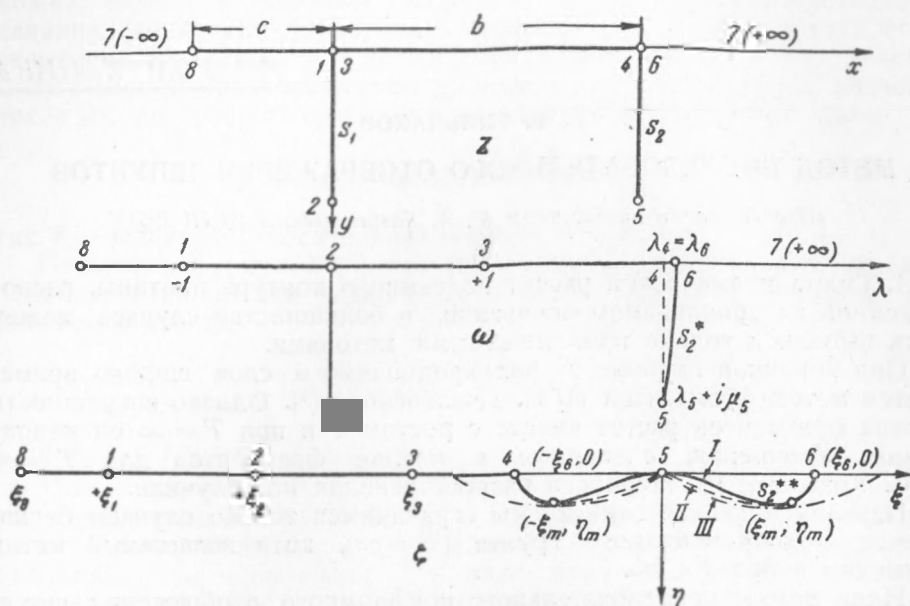


Рис. 1

В первом приближении криволинейный шпунт s_2^* заменим прямым

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_4 + \lambda_5}{2} \quad (5)$$

Длину этого шпунта (обозначим ее $\tilde{\mu}$) определим из (3):

$$\tilde{\mu} = \frac{bs_2}{\tilde{\lambda} s_1^2} \quad (6)$$

после чего, во втором шаге, функция

$$\zeta = \sqrt{1 + \left[\frac{\omega - \tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \right]^2} \quad (7)$$

отобразит полученный одношпунтовый флютбет на полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$.

Линейное преобразование

$$\zeta^* = \frac{2(\zeta - 1)}{1 - \xi_8} + 1, \quad (8)$$

где $\xi_8 \leq -1$ есть образ точки δ ($z = -c$), завершает отображение области z на область стандартного плоского флютбета ζ^* с концами в точках ± 1 .

Более точные результаты получим, заменив шпунт s_2^* разрезом в форме дуги окружности. Окружность с центром на оси λ проводим

через точки $(\lambda_4; 0)$ и $(\lambda_5; \mu_5)$. Этими тремя условиями окружность определяется однозначно и, в частности, ее диаметр будет $2R = \frac{\mu_5^2}{\varepsilon} + \varepsilon$, где $\varepsilon = \lambda_4 - \lambda_5$.

Отображая последовательно область ω (полуплоскость с разрезом в форме дуги окружности) на полуплоскости ζ и ζ^* , получаем формулы, аналогичные (7) и (8):

$$\zeta = \sqrt{1 + N^2}, \quad N = \frac{\mu_5(\omega - \lambda_4)}{\mu_5^2 + \varepsilon(\omega - \lambda_5)}, \quad (9)$$

и

$$\zeta^* = 2 \frac{(\xi_7 - \xi_8)(\zeta - 1)}{(1 - \xi_8)(\xi_7 - \zeta)} + 1, \quad (10)$$

где $\xi_7 = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_5}{\varepsilon}\right)^2}$ и ξ_8 — образы точек $7 (z = \infty)$ и $8 (z = -c)$, вычисленные по формуле (9).

3. Переходим к оценке погрешности изложенного метода в предположении, что шпунт s_2^* заменен отрезком $\lambda = \lambda_5$, длина которого μ_5 . Образ шпунта s_2 на полуплоскости $\zeta = \xi + i\eta$ (обозначим его s_2^{**}) найдем, положив в (7) $\tilde{\lambda} = \lambda_5$; $\tilde{\mu} = \mu_5$.

В результате получим алгебраическую кривую восьмой степени, уравнение которой довольно сложно (на рис. 1, I изображена кривая s_2^{**} при $s_1 = s_2 = 1$; $b = 2$; масштаб по оси η увеличен в 100 раз).

Но кривую s_2^{**} можно заменить близкой к ней кривой (рис. 1, II), которая полностью охватывает собою s_2^{**} :

$$\eta^2 = \frac{4\eta_{\max}^2 \xi^2 (\xi_6^2 - \xi^2)}{\xi_6^4}, \quad (11)$$

где η_{\max} — ордината точек максимума кривой (11) и $\xi_6 = \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\mu_5}\right)^2}$ — образ точки $6 (z = b)$.

Заменим теперь кривую (11) двумя дугами парабол (рис. 1, III)

$$\eta^* = \frac{2\eta_{\max} \xi (\pm \sqrt{2} \xi_6 - \xi)}{\xi_6^2}, \quad (12)$$

для точек которых в рассматриваемом интервале имеем $\eta^* \geq \eta$.

К полученной полуплоскости с выключенными двумя параболическими луночками $D(\zeta)$ применим функцию М. А. Лаврентьева ((²), гл. V, § 52)

$$w(u; v) = F(\zeta; \Gamma) = \zeta + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta^*(t) dt}{\zeta - t}, \quad (13)$$

реализующую, с точностью до малых высшего порядка, конформное отображение области $D(\zeta)$ на полуплоскость $w(u; v)$.

Так как в методе последовательного отображения шпунтов мы полагаем $u = \xi$, то, ограничиваясь точками границы области z , после всех преобразований получим для величины погрешности δ следующую формулу:

$$\delta \leq \frac{s_2^3}{\sqrt{2} \pi \xi b (b^2 + s_1^2)}, \quad (14)$$

где ξ — образ точки z , в которой определяется погрешность.

4. Выведенные формулы носят вполне общий характер и для отображения n -шпунтового флютбета на полуплоскость необходимо только выполнить n отдельных шагов, каждый из которых переведет один какой-либо шпунт в отрезок действительной оси.

В заключение отметим еще, что оценка (14) несколько завышена. Так например, при $b \geq s_1 + s_2$ величина противодавления, определенная на основе формул (7) и (8) для двухшпунтового несимметричного флютбета, отклоняется от значения, полученного по точным формулам (7), менее, чем на 0,1%, во всех точках, за исключением точки \bar{b} , где это отклонение не превышает 1%.

Таким образом, только при расчете плотин Сенкова, в которых встречается $b < s_1 + s_2$, необходимо обращаться к более сложным формулам (9) и (10).

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
12 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. С. Козлов, Гидромеханический расчет флютбетов, 1941. ² М. А. Лаврентьев, Конформные отображения, 1946. ³ Н. Т. Мелешенко, Изв. Ин-та гидрологии, 28 (1940). ⁴ Н. Н. Павловский, Гидромеханический расчет плотин системы Сенкова, 1937. ⁵ В. И. Сегал, Инж. сборн. АН СССР, 3, в. 1 (1946). ⁶ П. Ф. Фильчаков, Приближенный метод гидромеханического расчета плотин, изд. АН УССР, 1951. ⁷ П. Ф. Фильчаков, Укр. матем. журн., 2, № 4 (1950).