Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

С. Н. МЕРГЕЛЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ПОЛИНОМОВ НА ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 26 III 1951)

Пусть E — ограниченное замкнутое множество, не разбивающее плоскость, $f(z)$ — непрерывная на E функция, аналитическая во всех внутренних точках E.

Вопрос о возможности равномерной аппроксимации $f(z)$ полиномами от z на множестве E в том случае, когда множество E нигде не плотно, рассматривался Вейерштрассом, Уолшем [1], Гартогсом и Розенталем [2] и др. Его решение было найдено в 1934 г. М. А. Лаврентьевым [3], доказавшим возможность равномерной полиномиальной аппроксимации для произвольных ограниченных и нигде не плотных континуумов, не разбивающих плоскость.

В том случае, когда множество внутренних точек E составляет одну область, причем E является замыканием этой области, вопрос о равномерных приближениях на E исследовался в работах Аппеля [4], Рунге [5], Уолша [6], Фарреля [7], М. В. Келдыша [8]. Окончательное решение проблемы для того случая, когда E является замыканием области, было дано в 1945 г. М. В. Келдышем [9], доказавшим возможность равномерных приближений в замкнутых областях со связным дополнением, совпадающих с множеством внутренних точек своего замыкания.

В настоящей заметке приводится решение проблемы для произвольных замкнутых множеств; тем самым полностью решается следующая задача:

Где и к чему могут равномерно сходиться полиномы от z?

Заметим, что излагаемый в этой заметке способ исследования проблемы отличен от тех методов, которыми пользовались указанные выше авторы, и основывается на рассуждениях, приведенных в статье [10].

Теорема. *Для того чтобы любая непрерывная на E и аналитическая во внутренних точках E функция $f(z)$ разлагалась в ряд по полиномам от z, равномерно сходящийся на E к $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы замкнутое множество E не разбивало плоскость.*

Наметим доказательство теоремы.

Через $\varphi(z)$ обозначим какую-либо непрерывную во всей плоскости функцию, совпадающую на E с $f(z)$; $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $\varphi(z)$ в круге $|z| < R_0$ ($R_0 > 1$), содержащем E. Пусть G означает открытое множество всех внутренних точек E, $\Gamma = E - G$, G_δ — те точки E, расстояние которых до Γ превосходит δ, $0 < \delta < 1$, Γ_δ — граница G_δ, $R_\delta = E - G_\delta$.

Последовательность открытых множеств $D_1, D_2, \ldots$ выберем так, чтобы выполнялись условия:

1. $E \in D_{n+1} \in D_n, \quad n = 1, 2, \ldots$

2. Каждое из D_n состоит из конечного числа областей с аналитической границей, гомеоморфной окружности.

3. Дополнения к $\overline{D}_n$ сходятся к дополнению к E. Пусть $L_n = \overline{D}_n - D_n$, $R_{n\delta} = \overline{D}_n - G_\delta$; определим следующие функции:

$$K(r) = \begin{cases} \frac{3}{\pi\delta^2}\left(1 - \frac{r}{\delta}\right), & 0 < r \leqslant \delta, \\ 0, & r > \delta; \end{cases}$$

$$\Phi(z) = \iint\limits_{|\zeta| < 2R_0} \varphi(\zeta) K(|\zeta - z|)\, d\xi\, d\eta, \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Отметим ряд свойств введенных функций.

$$\iint\limits_{|\zeta| < 2R_0} K(|\zeta - z|)\, d\xi\, d\eta = 1, \quad z \in E;$$

$$\iint\limits_{|\zeta| < 2R_0} K_x'(|\zeta - z|)\, d\xi\, d\eta = \iint\limits_{|\zeta| < 2R_0} K_y'(|\zeta - z|)\, d\xi\, d\eta = 0, \quad z \in E;$$

$$\iint\limits_{|\zeta| < 2R_0} \{|K_x'(|\zeta - z|)| + |K_y'(|\zeta - z|)|\}\, d\xi\, d\eta < \frac{6}{\delta};$$

$$|\Phi(z) - \varphi(z)| \leqslant \omega(\delta); \tag{1}$$

$$\Phi(z) = \varphi(z), \quad z \in \overline{G}_\delta. \tag{2}$$

Если $\operatorname{Re}\Phi(z) = U(z)$, $\operatorname{Im}\Phi(z) = V(z)$, $\Psi(z) = U_x'(z) - V_y'(z) + i(U_y'(z) + V_x'(z))$, то

$$|\Psi(z)| \leqslant \frac{12\omega(\delta)}{\delta} \tag{3}$$

Формула

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_n} \frac{\Phi(t)}{t - z}\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{\Phi(t)}{t - z}\, dt + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R_{n\delta}} \frac{\Psi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta =$$

$$= I_1(L_n;\ z) + I_2(\Gamma_\delta;\ z) + I_3(R_{n\delta};\ z)$$

легко выводится из формулы Грина. Так как $I_1(L_n;\ z)$ — аналитическая на E функция, $I_2(\Gamma_\delta;\ z) = 0$ для $z \in \Gamma$ в силу (2) и аналитичности $\varphi(z)$ на G_δ, а $I_3(R_{n\delta};\ z)$ при $n \to \infty$ равномерно на E сходится к $I_3(R_\delta;\ z)$, то для доказательства теоремы, в силу свойства (1), достаточно показать, что

$$\inf_{\{P\}} \max_{z \in \Gamma} |I_3(R_\delta;\ z) - P(z)| \to 0 \text{ при } \delta \to 0, \tag{4}$$

где нижняя грань берется по всевозможным полиномам от z.

Лемма. *Для любой точки $\zeta \in R_\delta$ найдется полином $P_\zeta(z)$ от z, для которого*

$$|P_\zeta(z)| < \frac{A}{\delta}, \quad z \in E; \tag{5}$$

$$\left|P_\zeta(z) - \frac{1}{\zeta - z}\right| < B\frac{\delta^2}{|\zeta - z|^3}, \quad z \in E, \quad |\zeta - z| > 10\delta, \tag{6}$$

где A, B — абсолютные постоянные, а степень $P_\zeta(z)$ ограничена числом, не зависящим от ζ.

Предположим, для простоты, что $\zeta = 0$. Множество E не разбивает плоскость, поэтому существует жорданова дуга l, принадлежащая дополнению к E, с концами в точках t_1 и t_2 такая, что $|t_1| = 2\delta$, $|t_2| = 3\delta$. Через d обозначим жорданову область со связным дополнением, содержащую l и не имеющую общих точек ни с множеством E, ни с окружностью $|z| = 4\delta$.

Пусть функция $z = z(w)$ осуществляет конформное отображение $|w| > 4\delta$ на дополнение к d, при котором бесконечно удаленные точки соответствуют друг другу. Область, в которую переходит d при трансформации $\frac{1}{4\delta} z$, обозначим через D.

Функция

$$\frac{1}{4\delta} z(4\delta w) = F(w) = aw + b + \frac{a_1}{w} + \frac{a_2}{w^2} + \ldots$$

отображает $|w| > 1$ на дополнение к D. Область D расположена в круге $|w| < 1$ и ее диаметр превосходит $1/4$, поэтому для числа a, равного емкости D, имеем

$$0 < A_1 < |a| < A_2 < \infty$$

(здесь и в дальнейшем $A_1, A_2, \ldots$ означают абсолютные постоянные). Функция $F(w) - aw = b + a_1 w^{-1} + a_2 w^{-2} + \ldots$ аналитична в $|w| > 1$ и ограничена двойкой, поэтому

$$|b| < 2, \quad |a_k| < 2, \quad k = 1, 2, \ldots; \tag{7}$$

$$|F(w) - aw - b| < \frac{4}{|w|}, \quad |w| > 2.$$

Переходя к $z(w)$, отсюда находим

$$|z(w) - 4\delta b - aw| < \frac{128\delta^2}{|w|}, \quad |w| > 8\delta.$$

Если $w = w(z)$ означает функцию, обратную к $z(w)$, то $|w(z)| > |z|$ и

$$\left| \frac{1}{z - 4\delta b} - \frac{1}{aw(z)} \right| \leqslant \frac{A_3\delta^2}{|z - 4\delta b|\,|z|^2} < A_4 \frac{\delta^2}{|z|^3}, \quad |z| > 10\delta.$$

На множестве E функция $\frac{1}{aw(z)}$ аналитична и ограничена числом $\frac{A_5}{\delta}$, поэтому существует полином $Q(z)$ такой, что

$$\left| \frac{1}{z - 4\delta b} - Q(z) \right| < A_6 \frac{\delta^2}{|z|^3}, \quad z \in E, \ |z| > 10\delta; \tag{8}$$

$$|Q(z)| < \frac{A_7}{\delta}, \quad z \in E; \tag{9}$$

$$|Q(z)| < \frac{A_8}{|z|}, \quad z \in E. \tag{10}$$

Из этих неравенств непосредственно следует

$$\left| \frac{4\delta b}{(z - 4\delta b)^2} - 4\delta b\,[Q(z)]^2 \right| < 4\delta b \frac{A_6\delta^2}{|z|^3} \frac{A_9}{|z|} < A_{10} \frac{\delta^2}{|z|^3}, \quad z \in E, \quad |z| > 10\delta. \tag{11}$$

В силу тождества

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z - 4\delta b} - \frac{4\delta b}{(z - 4\delta b)^2} + \frac{16\delta^2 b^2}{z(z - 4\delta b)^2}$$

имеем, согласно (8) и (11),

$$\left|\frac{1}{z}-[Q(z)-4\delta bQ^2(z)]\right|\leqslant\frac{A_6\delta^2}{|z|^3}+\frac{A_{10}\delta^2}{|z|^3}+\frac{64\delta^2}{|z||z-4\delta b|^2}<A_{11}\frac{\delta^2}{|z|^3}, \quad (12)$$

$$z\in E, \quad |z|>10\delta.$$

Из неравенств (9) и (12) заключаем, что для точки $\zeta=0$ в качестве $P_0(z)$ можем принять полином $Q(z)-4\delta b[Q(z)]^2$, который удовлетворяет неравенствам (5), (6) леммы. Можно показать, что существует система полиномов $\{P_\zeta(z)\}$, о которых говорится в лемме и таких, что лишь для конечного числа точек ζ соответствующие полиномы будут отличны друг от друга; отсюда следует, что степень $P_\zeta(z)$ ограничена числом, не зависящим от ζ. Полином $P(z)$ определим формулой

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R_\delta}\Psi(\zeta)P_\zeta(z)\,d\xi\,d\eta=P(z).$$

Имеем

$$\left|P(z)-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R_\delta}\frac{\Psi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta\right|<\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{R_\delta}|\Psi(\zeta)|\left|\frac{1}{\zeta-z}-P_\zeta(z)\right|d\xi\,d\eta.$$

Для оценки последнего интеграла разбиваем область интегрирования на две части. В части R_δ, расположенной вне круга $|z|\leqslant10\delta$, подинтегральную разность оцениваем на основании (6), в остальной части R_δ — на основании (5); $\Psi(\zeta)$ оцениваем согласно (3). В результате находим

$$\max_{z\in\Gamma}|P(z)-I_3(R_\delta;\,z)|<A_{12}\omega(\delta).$$

Таким образом, соотношение (4) доказано.

Следующее предложение эквивалентно доказанной теореме.

Следствие*. Пусть $\lambda(z)$ — вещественная функция, определенная и непрерывная в круге $|z|\leqslant1$. Если множество E_c тех точек, в которых $\lambda(z)=c$, при любом c не разбивает плоскость, то всякую непрерывную в $|z|\leqslant1$ функцию $f(z)$, аналитическую во внутренних точках любого из множеств E_c $(-\infty<c<\infty)$, возможно представить в виде ряда полиномов от z и $\lambda(z)$, равномерно сходящегося к $f(z)$ в круге $|z|\leqslant1$.

Математический сектор
Академии наук Арм.ССР

Поступило
23 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. L. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions, 1935. [2] F. Hartogs u. A. Rosenthal, Math. Ann., 104 (1931). [3] М. Лаврентьев, Actualités Sci. et Ind., No. 441, Paris, 1936. [4] P. Appel, Acta Math., 1 (1882). [5] C. Runge, ibid., 6 (1885). [6] J. L. Walsh, Math. Ann., 96, 430 (1926). [7] O. J. Farrell, Am. Journ. Math., 54, 571 (1932). [8] М. Келдыш, Матем. сборн., 8 (50): 1, 137 (1940). [9] М. В. Келдыш, там же, 16 (58), № 3, 249 (1945). [10] С. Н. Мергелян, ДАН, 77, № 4 (1951).

* Постановка этой задачи принадлежит И. М. Гельфанду.