Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 2

ФИЗИКА

Н. С. ФАСТОВ

К ТЕРМОДИНАМИКЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

(Представлено академиком П. А. Ребиндером 8 III 1951)

При пластическом деформировании материала связь между тензором напряжений σ_{ik} и тензором деформаций ε_{ik}, вообще говоря, не является однозначной. Однако эта связь становится однозначной в случае так называемого первоначального нагружения, когда интенсивность деформаций сдвига Γ не убывает с течением времени. Как показано в ([1, 2]), свободная энергия пластически деформированного тела при изотермическом бесконечно медленном первоначальном нагружении $F_0^{пл}$ может быть представлена в виде

$$F_0^{пл} = F_0^{пл}(\Gamma,\ \varepsilon_{ll}), \tag{1}$$

где $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\varepsilon_{ik}^2 - {}^1/_3\,\varepsilon_{ll}^2}$ и ε_{ll} — относительное изменение объема. Выражение (1) можно рассматривать как обобщение опытных данных.

Исходя из выражения (1), установленного для бесконечно медленного деформирования, можно найти выражение для свободной энергии тела, пластически деформируемого с конечной скоростью $\dot{\varepsilon}_{ik}$. Для этого, считая величины Γ и ε_{ll} малыми, разложим (1) в ряд по степеням Γ и ε_{ll} с точностью до членов второго порядка малости. Учитывая, что равномерное всестороннее сжатие на пластическое деформирование влияния не оказывает, приходим к выражению

$$F_0^{пл} = A + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_s\,\frac{\mu-\beta}{\mu}\sqrt{\varepsilon_{ik}^2 - {}^1/_3\,\varepsilon_{ll}^2} + \beta\left(\varepsilon_{ik}^2 - {}^1/_3\,\varepsilon_{ll}^2\right) + \frac{K}{2}\,\varepsilon_{ll}^2, \tag{2}$$

где K — модуль всестороннего сжатия, μ — модуль сдвига, σ_s — предел текучести при растяжении, β — модуль пластичности, A — постоянная.

Для тензора напряжений получаем

$$\sigma_{ik}^{пл} = \frac{\partial F_0^{пл}}{\partial \varepsilon_{ik}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_s\,\frac{\mu-\beta}{\mu}\,\frac{\varepsilon_{ik} - {}^1/_3\,\varepsilon_{ll}\,\delta_{ik}}{\sqrt{\varepsilon_{nm}^2 - {}^1/_3\,\varepsilon_{nn}^2}} + 2\beta\left(\varepsilon_{ik} - {}^1/_3\,\varepsilon_{ll}\,\delta_{ik}\right) + K\varepsilon_{ll}\,\delta_{ik}. \tag{3}$$

Интенсивность скалывающих напряжений $S^{пл}$

$$S^{пл} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\sigma_{ik}^2 - {}^1/_3\,\sigma_{ll}^2} = \sigma_s\,\frac{\mu-\beta}{\mu} + 3\beta\Gamma \tag{4}$$

является линейной функцией интенсивности деформаций сдвига Γ. Это соответствует линейному упрочнению.

Для упругого деформирования в том же приближении в уравнениях (2), (3) и (4) следует положить $\beta = \mu$. В случае идеальной пластичности (отсутствие упрочнения) $\beta = 0$.

Для реальных материалов зависимость S от Γ изображена на рис. 1. Зависимость S от Γ для рассматриваемого здесь приближения показана на рис. 2. Отрезок OA соответствует области упругого деформирования (закон Гука), отрезок AB — области пластического деформирования.

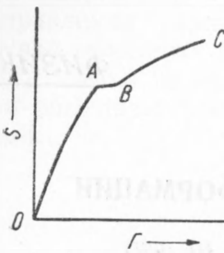

Рис. 1

При конечной скорости пластического деформирования (для первоначального нагружения) тело не будет находиться в статистическом равновесии и состояние тела для изотермического процесса будет определяться тензором деформации ε_{ik} и тензором релаксации ξ_{ik} [3]. Тензор релаксации характеризует степень отклонения системы от состояния статистического равновесия.

При приближении системы к состоянию статистического равновесия тензор ξ_{ik} будет стремиться к своему равновесному значению $\overline{\xi}_{ik}$. Свободная энергия на единицу объема будет функцией инвариантов, построенных из тензоров ε_{ik} и ξ_{ik}. Для однородного и изотропного тела из тензоров ε_{ik} и ξ_{ik} можно составить следующие инварианты:

$$I_1^2 = \varepsilon_{ll}^2, \qquad I_2^2 = \varepsilon_{ll}^2 \xi_{nn},$$

$$I_3^2 = \xi_{ll}^2, \qquad I_4^2 = \varepsilon_{ik}^2 - {}^1/_3\, \varepsilon_{ll}^2,$$

$$I_5^2 = (\varepsilon_{ik} - {}^1/_3 \varepsilon_{ll}\, \delta_{ik})\,(\xi_{ik} - {}^1/_3\, \xi_{nn}\, \delta_{ik}),$$

$$I_6^2 = \xi_{ik}^2 - {}^1/_3\, \xi_{ll}^2.$$

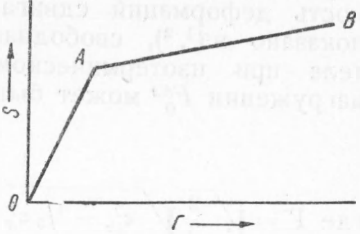

Рис. 2

В выражение для свободной энергии инварианты, характеризующие сдвиг, должны входить как в первой, так и во второй степени; инварианты, характеризующие изменение объема, — во второй степени. Наиболее общий инвариант первой степени есть $\sqrt{aI_4^2 + bI_5^2 + cI_6^2}$. Поэтому $F^{пл} = F^{пл}\left(I_1^2, I_2^2, I_3^2, I_4^2, I_5^2, I_6^2, \sqrt{aI_4^2 + bI_5^2 + cI_6^2}\right)$.

Разлагая последнее выражение в ряд и ограничиваясь членами второго порядка малости, получим

$$F^{пл} = \alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{aI_4^2 + bI_5^2 + cI_6^2} + \beta_1 I_1^2 + \beta_2 I_2^2 + \beta_3 I_3^2 + \beta_4 I_4^2 + \beta_5 I_5^2 + \beta_6 I_6^2\,. \quad (5)$$

Введем тензор $\varphi_{ik} = \xi_{ik} - \overline{\xi}_{ik}$, где $\overline{\xi}_{ik}$ — значение ξ_{ik}, определяемое соотношением

$$\frac{\partial F^{пл}}{\partial \xi_{ik}} = 0,$$

и будем считать, что отклонение системы от состояния статистического равновесия незначительно, т. е. что неравновесные значения инвариантов $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ мало отличаются от их равновесных значений. Поэтому (5) можно представить в виде

$$F^{пл} = A + \frac{K}{2}\varepsilon_{ll}^2 + \beta\left(\varepsilon_{ik}^2 - {}^1/_3\,\varepsilon_{ll}^2\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_s \frac{\mu - \beta}{\mu}\sqrt{\varepsilon_{ik}^2 - {}^1/_3\,\varepsilon_{ll}^2} +$$

$$+ N\varphi_{ll}^2 + \left(C - \frac{D}{\sqrt{\varepsilon_{nm}^2 - {}^1/_3\,\varepsilon_{nn}^2}}\right)\left(\varphi_{ik}^2 - {}^1/_3\,\varphi_{ll}^2\right). \quad (6)$$

При $\varphi_{ik}=0$ свободная энергия минимальна. Поэтому

$$N>0, \quad C-\frac{D}{\sqrt{\varepsilon_{ik}^2-{}^1/_3\,\varepsilon_{ll}^2}}>0.$$

Так как пластическое деформирование начинается от вполне определенного значения интенсивности деформаций сдвига Γ_0, т. е.

$$\Gamma=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\varepsilon_{nm}^2-{}^1/_3\,\varepsilon_{nn}^2}\geqslant\Gamma_0,$$

то

$$C>0,\; D>0.$$

Для того чтобы (5) при $\xi_{ik}=\overline{\xi}_{ik}$ переходило в (2), должны выполняться соотношения

$$\overline{\xi}_{ik}-{}^1/_3\,\overline{\xi}_{ll}\,\delta_{ik}=\lambda_1(\varepsilon_{ik}-{}^1/_3\,\varepsilon_{ll}\,\delta_{ik}), \quad \overline{\xi}_{ll}=\lambda_2\,\varepsilon_{ll},$$

где λ_1 и λ_2 — постоянные.

Тензор релаксации ξ_{ik} удовлетворяет уравнениям [3]:

$$\varphi_{ik}-{}^1/_3\,\varphi_{ll}\,\delta_{ik}=-\tau\,[\dot{\varphi}_{ik}-{}^1/_3\,\dot{\varphi}_{ll}\,\delta_{ik}+\lambda_1(\dot{\varepsilon}_{ik}-{}^1/_3\,\dot{\varepsilon}_{ll}\,\delta_{ik})], \tag{7}$$

$$\varphi_{ll}=-\tau_2\,[\dot{\varphi}_{ll}+\lambda_2\,\dot{\varepsilon}_{ll}], \tag{8}$$

где τ — время релаксации сдвига в пластической области, τ_2 — время релаксации объема. В нашем приближении время релаксации объема в пластической области равно времени релаксации объема в упругой области.

Решение уравнений (7) и (8) дает

$$\varphi_{ik}-{}^1/_3\,\varphi_{ll}\,\delta_{ik}=\nu_{ik}\,e^{-\frac{t}{\tau}}-\lambda_1\int_0^t e^{\frac{t'-t}{\tau}}[\dot{\varepsilon}_{ik}(t')-{}^1/_3\,\dot{\varepsilon}_{ll}(t')\,\delta_{ik}]\,dt', \tag{9}$$

$$\varphi_{ll}=-\lambda_2\int_{-\infty}^t e^{\frac{t-t'}{\tau_2}}\,\dot{\varepsilon}_{ll}(t')\,dt', \tag{10}$$

где ν_{ik} — значения $\varphi_{ik}-{}^1/_3\,\varphi_{ll}\,\delta_{ik}$ в начальный момент времени.

Тензор напряжений в неравновесном состоянии

$$\sigma_{ik}^{пл}=\frac{\partial F^{пл}}{\partial\varepsilon_{ik}}=K\varepsilon_{ll}\,\delta_{ik}+2\beta(\varepsilon_{ik}-{}^1/_3\,\varepsilon_{ll}\,\delta_{ik})+\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_s\,\frac{\mu-\beta}{\mu}\,\frac{\varepsilon_{ik}-{}^1/_3\,\varepsilon_{ll}\,\delta_{ik}}{\sqrt{\varepsilon_{nm}^2-{}^1/_3\,\varepsilon_{nn}^2}}-$$

$$-\frac{\eta_2}{\tau_2\lambda_2}\,\varphi_{ll}\,\delta_{ik}-\lambda_1\left(C-\frac{D}{\sqrt{\varepsilon_{nm}^2-{}^1/_3\,\varepsilon_{nn}^2}}\right)(\varphi_{ik}-{}^1/_3\,\varphi_{ll}\,\delta_{ik})+$$

$$+\frac{D\left(\varphi_{s\sigma}^2-{}^1/_3\,\varphi_{\sigma\sigma}^2\right)}{\left(\varepsilon_{nm}^2-{}^1/_3\,\varepsilon_{nn}^2\right)^{3/2}}(\varepsilon_{ik}-{}^1/_3\,\varepsilon_{ll}\,\delta_{ik}), \tag{11}$$

где η_2 — вторая вязкость.

При переходе из упругой области в пластическую должны выполняться следующие условия:

$$\sigma_{ik}^{уп}=\sigma_{ik}^{пл}, \qquad F^{уп}=F^{пл}.$$

Из этих условий определяются постоянные ν_{ik} и значение Γ в точке перехода в зависимости от скорости деформирования. Это значение интенсивности деформаций сдвига будет максимальным значением Γ в области упругого деформирования.

Если считать, что возникновение пластической деформации начинается при $t=0$, то

$$\lambda_1 \nu_{ik} = -\frac{2}{B - C/\Gamma_0}\frac{\eta_1}{\tau_1}\int_{-\infty}^{0} e^{t'/\tau_1}\left[\dot{\varepsilon}_{ik}(t') - {}^1/_3\,\dot{\varepsilon}_{ll}(t')\,\delta_{ik}\right]dt',$$

$$\Gamma_{\max} = \Gamma_0 + \frac{4}{\sqrt{6}}\frac{C(\mu-\beta)}{\Gamma_0^2(B - C/\Gamma_0)}\frac{\eta_1^2}{\tau_1^2}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{t'/\tau_1}\left[\dot{\varepsilon}_{ik}(t') - {}^1/_3\,\dot{\varepsilon}_{ll}(t')\,\delta_{ik}\right]dt'\right\}^2, \qquad (12)$$

где $\Gamma_0 = \sigma_s^0/3\mu$, τ_1 — время релаксации сдвига в упругой области, η_1 — первая вязкость и σ_s^0 — предел текучести на растяжение при бесконечно медленном деформировании.

Для малой скорости деформирования

$$\varphi_{ik} - {}^1/_3\,\varphi_{ll}\,\delta_{ik} = -\lambda_1\tau\left(\dot{\varepsilon}_{ik} - {}^1/_3\,\dot{\varepsilon}_{ll}\,\delta_{ik}\right),$$

$$\varphi_{ll} = -\lambda_2\tau_2\,\dot{\varepsilon}_{ll}$$

и (11) принимает вид

$$\sigma_{ik}^{пл} = K\varepsilon_{ll}\,\delta_{ik} + 2\beta\left(\varepsilon_{ik} - {}^1/_3\,\varepsilon_{ll}\,\delta_{ik}\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_s\,\frac{\mu-\beta}{\mu}\,\frac{\varepsilon_{ik} - {}^1/_3\,\varepsilon_{ll}\,\delta_{ik}}{\sqrt{\varepsilon_{nm}^2 - {}^1/_3\,\varepsilon_{nn}^2}} +$$

$$+ \eta_2\,\dot{\varepsilon}_{ll}\,\delta_{ik} + \left(C - \frac{D}{\sqrt{\varepsilon_{nm}^2 - {}^1/_3\,\varepsilon_{nn}^2}}\right)\lambda_1^2\tau\left(\dot{\varepsilon}_{ik} - {}^1/_3\,\dot{\varepsilon}_{ll}\,\delta_{ik}\right). \qquad (13)$$

Соотношения (11), (12), (13) определяют зависимость предела текучести и максимальной упругой деформации от скорости деформирования, зависимость напряжений от деформации и скорости деформирования при пластическом деформировании, а также вид кривой ползучести, качественно согласующиеся с опытными данными.

Институт металловедения и физики металлов
Центрального научно-исследовательского
института черной металлургии

Поступило
6 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. М. Качанов, Прикл. матем. и мех., 5, в. 3 (1941). [2] Л. М. Качанов, ДАН, 54, 311 (1946). [3] Б. Н. Финкельштейн и Н. С. Фастов, ДАН, 71, 875 (1950).