Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. Д. МАЛЮЖИНЕЦ

О ФОКУСИРОВАНИИ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком В. А. Фоком 12 III 1951)

Если определить фокус как точку, в которой модуль функции, описывающей волновое поле, имеет максимум, можно поставить следующий вопрос. При каких комплексных значениях волнового числа отсутствует возможность фокусирования? Ответом является следующая теорема.

Теорема. *Пусть в области G функция w удовлетворяет уравнению*

$$\Delta w + \lambda w = 0. \tag{1}$$

Для того чтобы внутри области абсолютная величина функции w не могла иметь максимума, необходимо и достаточно, чтобы вещественная часть λ была отрицательной или, иначе говоря, чтобы мнимая часть волнового числа k $(k^2 = \lambda)$ была по модулю больше вещественной.

Доказательство. Пусть $w = u + iv$; $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. Тогда уравнение (1) распадается на два

$$\Delta u + \lambda_1 u - \lambda_2 v = 0; \quad \Delta v + \lambda_1 v + \lambda_2 u = 0. \tag{2}$$

Составим выражение оператора Лапласа от квадрата модуля $|w|^2$:

$$\Delta |w|^2 = 2\,(u\Delta u + v\Delta v + |\operatorname{grad} w|^2).$$

Из уравнений (2) получаем $u\Delta u + v\Delta v = -\lambda_1 |w|^2$, так что

$$\frac{1}{2}\Delta |w|^2 = -\lambda_1 |w|^2 + |\operatorname{grad} w|^2. \tag{3}$$

Пусть $\lambda_1 < 0$. Предположим, что функция $|w|^2$ в некоторой внутренней точке области имеет максимум. Так как максимум $|w|^2$ должен быть, естественно, положительным, то, в силу формулы (3), $\Delta |w|^2 > 0$. Но необходимым условием максимума является $\Delta |w|^2 \leqslant 0$. Следовательно, максимум невозможен. Этим доказана достаточность условия $\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda < 0$ для обеспечения невозможности максимума.

Чтобы доказать необходимость, приведем пример, показывающий, что при $\lambda_1 = 0$ максимум еще возможен. Легко убедиться, что для частного решения $w = \frac{\sin\sqrt{\lambda}R}{\sqrt{\lambda}R} = 1 - \frac{\lambda R^2}{3!} + \frac{\lambda^2 R^4}{5!} - \ldots$ модуль обладает максимумом в точке $R = 0$ при $\lambda_1 = 0$, $|\lambda| > 0$. Таким образом, теорема доказана полностью*. Формулировка в терминах волнового числа k следует из того, что $\lambda_1 = (\mathrm{Re}\, k)^2 - (\mathrm{Im}\, k)^2$.

Выясним теперь условия, при которых модуль функции не может иметь максимума также на границе Γ области G. Предположим, что поверхность Γ кусочно гладкая и на ней задано краевое условие вида $\partial w / \partial n + hw = 0$, где n — внешняя нормаль и h — кусочно непрерывная комплексная функция точки. В угловых точках поверхности Γ и точках разрыва функции h будем считать функцию w непрерывной и однозначной (так что предел функции w в подобной точке не зависит от пути, принадлежащего $G + \Gamma$). В окрестности же правильных точек границы считаем функцию w непрерывно дифференцируемой.

Докажем, что при этих условиях модуль функции w не может иметь максимума на границе Γ, если всюду $\mathrm{Re}\, h > 0$.

Если положить $h = h_1 + ih_2$, то из краевого условия следует

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h_1 u - h_2 v = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial n} + h_1 v + h_2 u = 0.$$

Преобразуя с помощью этих выражений тождество $\frac{\partial |w|^2}{\partial n} = 2\left(u \frac{\partial u}{\partial n} + v \frac{\partial v}{\partial n}\right)$, получаем $\frac{\partial |w|^2}{\partial n} + 2h_1 |w|^2 = 0$. Но из этой формулы следует высказанное утверждение, так как, если $h_1 > 0$ и $w \neq 0$ в обыкновенной точке P границы Γ, то $\partial |w|^2 / \partial n < 0$ и в любой принадлежащей G окрестности точки P обязательно найдется точка P' такая, что $|w(P')| > |w(P)|$. В силу условия непрерывности и однозначности то же должно быть справедливо и для особых точек границы. Таким образом, ни в одной точке границы, для которой $\mathrm{Re}\, h > 0$, модуль функции w не может иметь максимума.

Отметим, что полученные результаты могут быть применены для доказательства теоремы единственности решения задачи о вынужденных гармонических колебаниях в произвольной области.

Поступило
4 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1945, стр. 309.

* Насколько известно автору, доказательство этой теоремы для комплексных значений λ не было опубликовано. Для вещественных λ оно непосредственно следует из известной теоремы об отсутствии положительного максимума и отрицательного минимума функции w внутри области, если $\lambda < 0$ ([1]).