Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 2

ГИДРОМЕХАНИКА

Бл. ДОЛАПЧИЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ВИХРЕВЫХ ДОРОЖЕК

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 27 II 1951)

Установлено, что как величина, так и направление скорости перемещения бесконечной вихревой системы — дорожки относительно потока жидкости, который встречает препятствие, производящее дорожку, зависят от взаимного расположения обеих вихревых цепочек. В самом деле, будем исходить из самой общей формулы, которая дает нам комплексную скорость каждого из вихрей двух параллельных вихревых цепочек с эквидистантными вихрями для обеих цепочек (при расстоянии $2l$) и с равными и противоположными циркуляциями Γ для каждой цепочки, а именно из

$$\left(\frac{dF}{dz}\right)_{z=z'_0} = \frac{\Gamma i}{4l} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2l}(z'_0 - z''_0), \tag{1}$$

где z', z'' представляют собой аффиксы вихрей соответственно верхней и нижней цепочки, а индекс 0 относится к некоторому начальному вихрю. Обозначив через $2h$ ширину улицы и положив $z''_0 = z'_0 - 2d - 2ih$, получим следующие три пары различных составляющих скорости перемещения дорожки:

$$U_S = \frac{\Gamma}{4l} \operatorname{cth}(\varkappa\pi), \quad V_S = 0; \qquad U_Z = \frac{\Gamma}{4l} \operatorname{th}(\varkappa\pi), \quad V_Z = 0; \tag{2}$$

$$U_A = \frac{\Gamma}{4l} \operatorname{th}(\varkappa\pi) \frac{1 + \operatorname{tg}^2(\lambda\pi)}{\operatorname{tg}^2(\lambda\pi) + \operatorname{th}^2(\varkappa\pi)}, \quad V_A = -\frac{\Gamma}{4l} \operatorname{tg}(\lambda\pi) \frac{1 - \operatorname{th}^2(\varkappa\pi)}{\operatorname{tg}^2(\lambda\pi) + \operatorname{th}^2(\varkappa\pi)}. \tag{3}$$

Из формул (2) видно, что вследствие $V_S = 0$, $V_Z = 0$ симметричная и шахматная дорожки перемещаются в направлении основного течения; асимметричная дорожка, ввиду того, что $V_A \neq 0$, перемещается косо по отношению к основному потоку. Это совсем не значит, что асимметричная система вихрей в обеих вихревых цепочках меняет направление своей оси относительно направления основного течения, а означает лишь то, что такая дорожка перемещается параллельно самой себе, удаляясь постепенно от оси симметрии обтекаемого тела, с которой совпадают оси как симметричной, так и шахматной дорожек во все время их существования.

Если придать вихрям малые смещения (первого или второго, но не четвертого или более высокого порядка) и исследовать устойчивость вихревой системы, то получается, как известно, что симметричная дорожка определенно неустойчива, шахматная может быть устойчивой, если выполнено условие Кармана

$$\operatorname{sh}(\varkappa\pi) = 1, \quad \varkappa = h/l \approx 0{,}281, \tag{4}$$

а асимметричная дорожка, если выполнено более общее условие [1]

$$\operatorname{sh}(\varkappa\pi) = \sin(\lambda\pi), \qquad (5)$$

которое обеспечивает существование косо протекающих дорожек — явление, которое не наблюдается в природе и не констатировано при лабораторных опытах.

Мы имеем в виду, что теоретическое исследование вопроса о движении и устойчивости вихревых дорожек предполагает, с одной стороны, идеальную жидкость, а с другой стороны, рассматривается бесконечная вихревая дорожка, не связанная с препятствием, которое производит вихри, в то время как именно этими реальными причинами вызываются наблюдаемые шахматные вихревые дорожки, которые протекают прямо. Но если принять во внимание, что вода, в которой чаще всего наблюдаются вихревые дорожки, является почти идеальной жидкостью, и что вихревая система изучается далеко за препятствием, то все же мы думаем, что можем дать и чисто теоретическое объяснение вопроса: чем вызывается тенденция устойчивых дорожек появляться исключительно в шахматном, но не в асимметричном порядке и протекать не косо, а прямо?

Имея в виду, что более подробное исследование Н. Е. Кочина [2] вообще исключает устойчивое состояние шахматных дорожек (а в одном из прежних наших сообщений [3] мы показали, что это относится и к асимметричным дорожкам), постановка вышеуказанного вопроса вообще была бы беспредметна, если бы результаты которые дает нам теория, не согласовались так удовлетворительно с экспериментальными данными. С одной стороны, эти теоретические результаты и теперь используются при построении теории вихревого сопротивления [4, 5], которая исходит из условия (4), гарантирующего существование «наименее неустойчивых вихревых образований». С другой стороны, не следует забывать, что механизм образования системы вихрей за цилиндром таков, что вихревая дорожка должна была бы быть если не вполне, то по крайней мере почти симметричной, тогда как мы констатируем, что она быстро делается шахматной, а не разрушается. Мы покажем, что шахматное расположение является последней стадией бесконечного множества также устойчивых промежуточных асимметричных дорожек. Другими словами, последние, протекая косо, стабилизируются и располагаются, в конце концов, в виде шахматной дорожки, протекающей прямо.

Рассматривая формулы (2) и (3), мы ранее [1] установили, что для параметров λ и $\varkappa$, которые удовлетворяют условиям устойчивости шахматных и асимметричных дорожек, имеет место свойство: $|\mathbf{W}_S| > |\mathbf{W}_A| > |\mathbf{W}_Z|$, которое показывает, что симметричные дорожки имеют самую большую скорость, асимметричные дорожки имеют меньшую скорость, а шахматные дорожки имеют самую маленькую скорость. Так же легко выведем, что асимметричные стабильные дорожки всегда являются более узкими, чем стабильные шахматные дорожки. Эти свойства показывают, что обобщенные асимметричные дорожки имеют, действительно, характер промежуточный между симметричными и шахматными. Все эти факты также близки к наблюдаемым опытным путем. Вот почему мы будем исходить из такого закона смещений, который приводит стабильную шахматную дорожку в несимметричное расположение, следовательно, ведет к косому протеканию системы, и будем искать пути отдельных вихрей.

Косое протекание вихревой дорожки мы получили уже при любом «групповом» смещении (в каждой из двух вихревых цепочек проводится бесконечное множество сечений так, чтобы в каждом сечении содержалось n вихрей, смещения которых в каждом следующем сечении повторялись). При $n=2$ (альтернативные смещения) мы вывели закон протекания (1) [3]. Этот эффект проявляется еще более очевидным образом, когда $n=1$ («одинаковые» смещения), в каковом случае для второй компоненты скорости находим формулу [6]

$$V = \frac{\pi^2}{4l^2}(\xi_0' - \xi_0'')\,\mathrm{ch}^{-2}(\varkappa\pi).$$

Но в рассматриваемом частном случае групповых смещений, при которых мы исходили из дорожки с шахматным расположением вихрей, начальные расположения вихрей были такими, что они всегда представляли собой несимметричное расположение, чем вызывалось, как мы это видели, $V \neq 0$. (Об этом асимметричном расположении как Розенхед [7], так и Глауер [8] высказали мнение, что они не могут быть стабильными именно ввиду того, что перпендикулярная к вихревым цепочкам составляющая скорости изменит взаимное расположение вихрей, т. е. разорит дорожку, что не является теоретическим фактом, так как асимметричные дорожки, как мы показали [1, 3], могут также быть стабильными.)

Итак, будем исходить из некоторого шахматного расположения вихрей и проследим их ход, принимая в качестве закона для смещений вихрей такое одинаковое смещение, которое, с одной стороны, должно перемещать вихревые цепочки относительно друг друга, а с другой стороны, расширять (сужать) вихревую дорожку. Наша цель найти закон, который управляет траекториями вихрей в их перемещенных относительно шахматного расположения состояниях, которые являются не чем иным, как асимметричными расположениями.

Принятый, таким образом, закон для смещения вихрей теперь имеет вид

$$z_0'' = z_0' - l \mp 2\xi - 2ih \pm 2i\eta, \tag{6}$$

где ξ (сдвиг вихревых цепочек), η (расширение или, соответственно, сужение) дорожки уже означают переменные величины. Тогда (6) можно написать в виде

$$z_0'' = z_0' - 2l\left\{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\xi}{l}\right) + i\left(\frac{h}{l} \mp \frac{\eta}{l}\right)\right\}, \tag{7}$$

или, после подстановок $\xi / l = \zeta$, $\eta' / l = \chi$, а также $1/2 \pm \zeta = \varphi$, $\varkappa \mp \chi = \psi$, в виде

$$z_0'' = z_0' - 2l(\varphi + i\psi). \tag{8}$$

Воспользовавшись формулой (1) или, что то же, формулой (3), которые имеют силу для асимметричного расположения, полученного из симметричного, для чего нужно заменить параметры λ, $\varkappa$ через φ, ψ, получим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \pm\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\Gamma}{4l^2}\,\mathrm{th}(\psi\pi)\,\frac{1+\mathrm{tg}^2(\varphi\pi)}{\mathrm{tg}^2(\varphi\pi)+\mathrm{th}^2(\psi\pi)}, \\ \mp\frac{d\psi}{dt} &= -\frac{\Gamma}{4l^2}\,\mathrm{tg}(\varphi\pi)\,\frac{1-\mathrm{th}^2(\psi\pi)}{\mathrm{tg}^2(\varphi\pi)+\mathrm{th}^2(\psi\pi)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Траектории, по которым движутся отдельные вихри, получаем, после некоторых преобразований и исключения dt, из уравнения

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\sin(\varphi\pi)\cos(\varphi\pi)}{\mathrm{sh}(\psi\pi)\,\mathrm{ch}(\psi\pi)}, \tag{10}$$

которое имеет интеграл

$$\mathrm{sh}^2(\psi\pi) = \sin^2(\varphi\pi) + C. \tag{11}$$

Для определения постоянной интегрирования C учитываем, с одной стороны, что при $t=0$ имеем $\xi_0=0$, $\eta_0=0$, откуда получаем $\varphi_0={}^1/_2$, $\psi_0=\varkappa$; с другой стороны, так как исходное расположение было стабильным по Карману, учитываем условие (4). Для постоянной интегрирования получим тогда $C=0$.

Итак, решение (10) получим в виде:

$$\operatorname{sh}^2(\psi\pi)=\sin^2(\lambda\pi), \tag{12}$$

откуда, принимая $l=1$, для траектории отдельных вихрей находим уравнение

$$\eta=h-\frac{1}{\pi}\ln\left|\sqrt{1+\cos^2(\xi\pi)}\pm\cos(\xi\pi)\right|. \tag{13}$$

Так как $\varphi=\frac{1}{2}+\frac{\xi}{l}$, то уравнение (12), собственно, имеет вид

$$\operatorname{sh}(\psi\pi)=\cos(\zeta\pi), \tag{14}$$

который совпадает с условием устойчивости (5) для асимметричной дорожки, в каковом условии надо положить $\lambda=\frac{d}{l}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\mu$, откуда получим, аналогично (14), что если будем исходить из шахматного расположения и оно превратится в асимметричное, то условие устойчивости переходит в

$$\operatorname{sh}(\varkappa\pi)=\cos(\mu\pi).$$

Итак, мы установили, что при одновременном перемещении вихревых цепочек и сужении дорожки закон, который управляет траекториями отдельных вихрей, таков, что они описывают стабильные траектории. Это значит, что все промежуточные асимметричные дорожки являются устойчивыми, что позволяет без нарушения дорожки расположить ее вихри в предельном шахматном порядке.

При этой стабилизации вихревая система, проходя через бесконечное множество асимметричных конфигураций, которые всегда уже шахматной дорожки, уменьшает свою скорость и, становясь возможно более широкой, начинает двигаться с наименьшей скоростью (2). Эта самая широкая дорожка соответствует опытному факту, что наблюдаемая шахматная дорожка имеет ширину значительно бо́льшую, чем наибольшее поперечное сечение обтекаемого тела. То же относится и к весьма медленному протеканию вихревой дорожки далеко за телом. Вблизи тела дорожки испытывают некоторые колебания как в отношении взаимного расстояния двух вихревых цепочек, так и в отношении расположения этих цепочек по отношению друг к другу.

Стабилизация вихревой дорожки продолжается недолго; в это время эффект косого протекания можно обнаружить только в виде небольшого смещения оси дорожки относительно оси симметрии тела. Как мы сказали, присутствие тела также оказывает свое влияние, вследствие чего это смещение вдали от тела едва заметно.

Математический институт
София, Болгария

Поступило
10 XI 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Бл. Долапчиев, ДАН, **77**, № 6 (1951). [2] Н. Е. Кочин, ДАН, **24**, 1 (1939). [3] Бл. Долапчиев, ДАН, **78**, № 1 (1951). [4] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, гл. V, § 23, 1948, стр. 232 и 233. [5] А. Космодемьянский, Уч. зап. МГУ, **6**, 43 (1940). [6] Bl. Dolaptschiew, ZAMM, **17**, 313 (1937); Списание на бълг. Академия на науките, **57**, 149 (1938). [7] L. Rosenhead, Proc. Cambr. Phil. Soc., **25**, pt. 2 (1928). [8] H. Glauert-Holl, Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie, 1929, S. 83 u. 88.