Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

В. А. ЯКУБОВИЧ

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ КАНОНИЧЕСКОГО ВИДА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 15 III 1951)

Рассматривается система

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q}, \tag{1}$$

где $\mathfrak{H}$ — вещественная квадратическая форма переменных p и q

$$\mathfrak{H} = \frac{\alpha(t)}{2} q^2 + \beta(t) qp + \frac{\gamma(t)}{2} p^2, \tag{2}$$

$\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ — непрерывные периодические периода ω функции.

Следуя М. Г. Крейну [1], систему (1) будем также записывать в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = JHx, \tag{1a}$$

где $x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Из [2] следует, что в множестве $G^3 = \{\mathfrak{H}\}$ всех форм указанного вида подмножество O форм, для которых все решения соответствующей системы (1) ограничены*, распадается на счетное число открытых связных компонент O_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) (области устойчивости). Для того чтобы $\mathfrak{H} \in O_n$, необходимо и достаточно, чтобы для любого решения x соответствующего уравнения угол поворота φ_x за время ω был заключен в пределах $n\pi < \varphi_x < (n+1)\pi$. Это основное утверждение будет все время использоваться в дальнейшем.

Пусть $\theta_x(t)$ — определенный по непрерывности $\arg x(t)$; $\theta_x(t) = \operatorname{arc\,tg}(q/p)$; $d\theta_x/dt = (\dot{q}p - \dot{p}q)/(p^2+q^2) = 2\mathfrak{H}/(p^2+q^2)$, откуда

$$\theta_x(t) = \theta_x(0) + \int_0^t \frac{2\mathfrak{H}}{p^2+q^2} dt; \quad \varphi_x = \int_0^\omega \frac{2\mathfrak{H}}{p^2+q^2} dt. \tag{3}$$

Пусть $h_{\min}(t)$ и $h_{\max}(t)$ — наименьшее и наибольшее характеристические числа матрицы H, матрицы квадратичной формы $2\mathfrak{H}$. Тогда $h_{\min}(t) \leqslant 2\mathfrak{H}/(p^2+q^2) \leqslant h_{\max}(t)$ и

$$\int_0^\omega h_{\min}(t)\, dt \leqslant \varphi_x \leqslant \int_0^\omega h_{\max}(t)\, dt. \tag{4}$$

* Исключая случай, когда все решения периодические или антипериодические периода ω.

Отсюда получаем:

Критерий устойчивости 1. *Если* $n\pi < \int_0^\omega h_{\min}(t)\,dt \leqslant \leqslant \int_0^\omega h_{\max}(t)\,dt < (n+1)\pi$, *то* $\mathfrak{H}$ *принадлежит n-й области устойчивости* O_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Беря за $\mathfrak{H}$ квадратичную форму $\mathfrak{H} = \frac{h(t)}{2c} q^2 + \frac{c}{2} p^2$ и полагая $q = y$, $p = \frac{1}{c}\dot{y}$, мы получаем из (1) уравнение

$$y'' + h(t)\,y = 0. \tag{5}$$

Критерий 1 в этом случае даст следующий критерий устойчивости для уравнения (5).

Пусть $n\pi/\omega \leqslant c \leqslant (n+1)\pi/\omega$. *Обозначим* $E_+ = E(h(t) \geqslant c^2)$, $E_- = E(h(t) \leqslant c^2)$. *Если* $\frac{1}{c}\int_{E_+} h(t)\,dt + c\cdot \mathrm{m}\,E_- < (n+1)\pi$ *и* $\frac{1}{c}\int_{E_-} h(t)\,dt + c\cdot \mathrm{m}\,E > n\pi$, *то* $h(t) \in O_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ ($\mathrm{m}\,E$ — лебеговская мера).

Пусть далее $\mathfrak{H}_\lambda$ — форма, зависящая от параметра λ. Будем предполагать, что $\partial\mathfrak{H}_\lambda/\partial\lambda$ существует и непрерывна по t.

Фиксируем начальное значение $x(0) = a$. Обозначим $\theta(t, \lambda)$ аргумент соответствующего решения. Найдем $\partial\theta/\partial\lambda$. Дифференцируя, находим, что $\partial\theta/\partial\lambda = \Delta(t)/(x, x)$, где $\Delta(t) = \mathrm{Det}\left\| \frac{\partial x}{\partial\lambda},\ x \right\|$. Из (1a) следует:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial\lambda} = JH_\lambda \frac{\partial x}{\partial\lambda} + J\frac{\partial H_\lambda}{\partial\lambda} x. \tag{6}$$

Уравнение (6) — неоднородная линейная система относительно $\partial x/\partial\lambda$. Обозначая через $X(t)$ матрицу фундаментальной системы решений уравнения (1a), определенную условием $X(0) = E$, получим, по известной формуле:

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda} = X(t)\int_0^t X(s)^{-1} J \frac{\partial H_\lambda}{\partial\lambda} x(s)\,ds,$$

откуда

$$\Delta(t) = \mathrm{Det}\left\| \int_0^t X(s)^{-1} J \frac{\partial H_\lambda}{\partial\lambda} x(s)\,ds,\ a \right\|, \text{ так как } x(t) = X(t)\,a \text{ и } \mathrm{Det}\,X(t) \equiv 1.$$

$$\Delta(t) = \int_0^t \mathrm{Det}\left\| X(s)^{-1} J \frac{\partial H_\lambda}{\partial\lambda} x(s),\ a \right\| ds = \int_0^t \mathrm{Det}\left\| J\frac{\partial H_\lambda}{\partial\lambda} x(s),\ x(s) \right\| ds.$$

Используя соотношение $\mathrm{Det}\,\| Ja,\ b \| = (a, b)$, получим $\Delta(t) = \int_0^t \left(\frac{\partial H_\lambda}{\partial\lambda} x, x\right) ds$, или

$$\frac{\partial\theta}{\partial\lambda} = \frac{1}{(x(t), x(t))}\int_0^t \left(\frac{\partial H_\lambda}{\partial\lambda} x(s),\ x(s)\right) ds = \frac{2}{p^2 + q^2}\int_0^t \frac{\partial\mathfrak{H}_\lambda}{\partial\lambda}\,ds. \tag{7}$$

Применяя последнюю формулу к $\mathfrak{H}_\lambda = \lambda\mathfrak{H}_1 + (1 - \lambda)\,\mathfrak{H}_2$, получим следующую теорему.

Теорема сравнения. *Пусть* x_1 *и* x_2 — *решения уравнений* (1) *с формами* $\mathfrak{H}_1$ *и* $\mathfrak{H}_2$ *и* $x_1(0) = x_2(0)$. *Пусть* $\mathfrak{H}_1(t, p, q) \geqslant \mathfrak{H}_2(t, p, q)$ *и хотя бы для одного t имеет место строгое неравенство. Тогда вектор* $x_1(t)$ *вращается впереди вектора* $x_2(t)$, $\arg x_1(t) \geqslant \arg x_2(t)$

и $\varphi_{x_1} > \varphi_{x_2}$, где φ_{x_1} и φ_{x_2} — *соответствующие углы поворота за время* ω.

Легко проверить, что эта теорема для уравнения (5) дает обычную теорему сравнения.

Обозначим далее, как и в ([2]), Π_n^{**} множество форм, для которых все решения периодические или антипериодические и вращаются на угол $n\pi$ за время ω.

Теорема 1. *Для того чтобы* $\mathfrak{H} \in O_n$, *необходимо и достаточно, чтобы нашлись формы* $\mathfrak{G}_n \in \Pi_n^{**}$ *и* $\mathfrak{G}_{n+1} \in \Pi_{n+1}^{**}$ *такие, что*

$$\mathfrak{G}_n \leqslant \mathfrak{H} \leqslant \mathfrak{G}_{n+1}, \tag{8}$$

причем каждое из неравенств хотя бы для одного t превращается в строгое неравенство.

Теорема 2 (критерий устойчивости 2). *Пусть* $\mathfrak{H}_1 \leqslant \mathfrak{H} \leqslant \mathfrak{H}_2$ *и* $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2 \in O_n$. *Тогда и* $\mathfrak{H} \in O_n$*.

Теорема 2 и достаточность в теореме 1 вытекают из теоремы сравнения. Необходимость в теореме 1 доказывается довольно сложно. Заметим, что если $\mathfrak{H} \in O_n$, то найдется бесконечно много форм $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2 \in O_n$ таких, что $\mathfrak{H}_1 \leqslant \mathfrak{H} \leqslant \mathfrak{H}_2$. Это следует из того, что O_n — открытое множество.

Для данной формы $\mathfrak{H}(t, p, q)$ можно построить наибольшую форму с постоянными коэффициентами $\mathfrak{H}_1(p, q) \leqslant \mathfrak{H}(t, p, q)$ и наименьшую форму с постоянными коэффициентами $\mathfrak{H}_2(p, q) \geqslant \mathfrak{H}(t, p, q)$. Для форм с постоянными коэффициентами легко определить их принадлежность O_n. Если $\mathfrak{H}_1(p, q)$, $\mathfrak{H}_2(p, q) \in O_n$, то, по теореме 2, и $\mathfrak{H}(t, p, q) \in O_n$.

Теорему 1 также можно применить, сравнивая $\mathfrak{H}$ с формами с постоянными коэффициентами. Найдем общий вид форм $\mathfrak{G}_n \in \Pi_n^{**}$ с постоянными коэффициентами.

Пусть $\mathfrak{G}_n \in \Pi_n^{**}$ и JL — соответствующая матрица в уравнении (1a). Для фундаментальной системы решений $X(t) = e^{JLt}$ имеем $X(\omega) = \pm X(0) = \pm E$. Следовательно, $JL = \frac{1}{\omega} \ln(\pm E) = \frac{k\pi}{\omega} SJS^{-1}, k = 0, \pm 1, \ldots$ S — любая матрица с детерминантом 1, $k\pi$ — угол поворота любого решения за время ω. Следовательно, $k = n$, $L = \frac{n\pi}{\omega} J^{-1} SJS^{-1}$, L — матрица формы $2\mathfrak{G}_n$. Отсюда общий вид $\mathfrak{G}_n$ дается выражением:

$$\mathfrak{G}_n(p, q) = \frac{n\pi}{2\omega}\left[(\alpha_n^2 + \beta_n^2) p^2 + 2(\alpha_n\gamma_n + \beta_n\delta_n) pq + (\gamma_n^2 + \delta_n^2) q^2\right], \tag{9}$$

где α_n, β_n, γ_n, δ_n — любые числа, удовлетворяющие условию $\alpha_n\gamma_n - \beta_n\delta_n = 1$.

Беря за $\mathfrak{G}_n = \frac{n^2\pi^2}{2\omega^2} p^2 + \frac{1}{2} q^2$, получим для уравнения (5) известный критерий Н. Е. Жуковского:

Если $n^2\pi^2/\omega^2 \leqslant h(t) \leqslant (n+1)^2\pi^2/\omega^2$, то $h(t) \in O_n$.

Можно получить общий вид форм $\mathfrak{G}_n$ с переменными коэффициентами и, тем самым, «выписать» все $\mathfrak{H}$, для которых решения ограничены.

Осцилляционная теорема. *Обозначим* $h_{\min}(t, \lambda)$ *и* $h_{\max}(t, \lambda)$ *наименьшее и наибольшее характеристические числа формы* $\mathfrak{H}_\lambda(t, p, q)$ *и* $h'_{\min}(t, \lambda)$ — *наименьшее характеристическое число формы* $\partial\mathfrak{H}/\partial\lambda$.

---

* Для уравнения (5) теорема 2 и достаточность в теореме 1 следуют из работ Н. В. Адамова ([3]).

Предположим, что:

I. $h'_{\min}(t, \lambda) \geqq 0$ (*при фиксированном* λ).

II. $\int\limits_0^\omega h_{\min}(t, \lambda)\, dt \to +\infty$ *при* $\lambda \to +\infty$.

III. $\int\limits_0^\omega h_{\max}(t, \lambda)\, dt \to -\infty$ *при* $\lambda \to -\infty$.

Тогда существует последовательность собственных чисел

$$\ldots < \lambda'_{-2} \leqslant \lambda''_{-2} < \lambda'_{-1} \leqslant \lambda''_{-1} < \lambda'_0 \leqslant \lambda''_0 < \lambda'_1 \leqslant \lambda''_1 < \lambda'_2 \leqslant \lambda''_2 < \ldots,$$

простирающаяся в обе стороны на бесконечность, обладающая следующими свойствами:

1. *Собственные числа с четными нижними индексами являются собственными значениями краевой задачи* $x(\omega) = x(0)$ *и с нечетными нижними индексами — собственными значениями краевой задачи* $x(\omega) = -x(0)$.

2. *Если* $\lambda'_n \neq \lambda''_n$, *то для* $\lambda = \lambda'_n$ (*и для* $\lambda = \lambda''_n$) *имеется только одно периодическое или антипериодическое решение периода* ω. *Если* $\lambda'_n = \lambda''_n$, *то все решения периодические или антипериодические периода* ω. *У собственных векторов — решений, соответствующих собственным значениям с нижним индексом* n, *угол поворота за время* ω $\varphi_x = n\pi$.

3. *Интервалы* $\lambda''_n < \lambda < \lambda'_{n+1}$ *суть интервалы устойчивости* (*для этих* λ *все решения ограничены*), *интервалы* $\lambda'_n < \lambda < \lambda''_n$ *являются интервалами неустойчивости* (*имеются неограниченные решения*).

Доказательство опирается на основную теорему в [2]. Подсчитывая углы поворота $\varphi_x(\lambda)$, получим из (4) и (7), что при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$ $\varphi_x(\lambda)$, монотонно возрастая, изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Отсюда следует, что точка $\mathfrak{H}_\lambda$ при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$ пробегает трехмерную модель пространства G^3 слева направо, рассекая каждую из поверхностей $\Pi_n = \Pi_n^{*'} \cup \Pi_n^{**} \cup \Pi_n^{*''}$ слева направо. Это и является перефразировкой утверждения осцилляционной теоремы.

Для $\mathfrak{H}_\lambda = \lambda\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$ достаточным для выполнения осцилляционной теоремы является одно условие I. В этом случае II и III являются следствиями I.

Можно привести нетривиальный пример, когда $h'_{\min} \equiv 0$ и осцилляционная теорема неверна. Условие I будет выполнено, если будут выполнены условия Крейна [1] $\mathfrak{H}_1 \geqslant 0$ и $\int\limits_0^\omega \mathfrak{H}_1\, dt > 0$. В случае линейной зависимости от параметра λ для собственных чисел $\lambda_n = \lambda'_n, \lambda''_n$ из (4) и условия $\varphi_x(\lambda_n) = n\pi$ легко получить оценку, которая показывает, что $\lambda_n \sim n$ при $n \to \pm\infty$.

При других предположениях тем же методом можно получить другие осцилляционные теоремы.

Поступило
11 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, ДАН, **73**, № 4 (1950). [2] В. А. Якубович, ДАН, **74**, № 5 (1950). [3] Н. В. Адамов, Матем. сборн., **42**, 6 (1935).