Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

А. В. ШТРАУС

К ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ РЕЗОЛЬВЕНТ СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 III 1951)

1. Как известно, каждой спектральной функции $E(t)$ симметрического оператора A, действующего в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$, соответствует семейство ограниченных линейных операторов R_λ, определенных для всякого невещественного значения параметра λ формулой

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE(t)}{t-\lambda}. \tag{1}$$

М. А. Наймарк установил важную теорему ([4], теорема 5) о том, что всякая спектральная функция оператора A порождается некоторым самосопряженным расширением $\tilde{A}$ этого оператора, действующим в объемлющем пространстве $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$. Отсюда непосредственно следует ([5]), что операторная функция R_λ является обобщенной резольвентой оператора A тогда и только тогда, если она имеет вид

$$R_\lambda f = P\tilde{R}_\lambda f \quad (f \in \mathfrak{H}), \tag{2}$$

где $\tilde{R}_\lambda = (\tilde{A} - \lambda E)^{-1}$, а P есть оператор ортогонального проектирования в $\tilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$.

Можно бы, впрочем, формулу (2) принять в качестве определения обобщенной резольвенты и на основании теоремы М. А. Наймарка заключить, что всякая обобщенная резольвента допускает интегральное представление (1) (см., например, ([1])).

В ([8]) была установлена общая формула обобщенных резольвент замкнутого симметрического оператора A:

$$R_\lambda = (A-\lambda E)^{-1}(E-P_{\bar\lambda}) - \frac{1}{\lambda-\bar\lambda}P_{\bar\lambda} +$$
$$+\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}P_\lambda[(\bar\lambda_0-\bar\lambda)E-(\lambda_0-\bar\lambda)F(\lambda)]\{P_{\bar\lambda}[(\bar\lambda_0-\lambda)E-(\lambda_0-\lambda)F(\lambda)]\}^{-1} \tag{3}$$
$$(\operatorname{Im}\lambda\cdot\operatorname{Im}\lambda_0>0),$$

где P_λ — оператор ортогонального проектирования в $\mathfrak{H}$ на дефектное подпространство $\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{R}(A-\bar\lambda E)$ оператора A; λ_0 — произвольное фиксированное невещественное число, а $F(\lambda)$ — произвольная регулярная операторная функция из $\mathfrak{M}_{\overline{\lambda}_0}$ в $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$, не превосходящая по норме единицы. Для значений λ в другой полуплоскости R_λ определяется равенством $R_\lambda = R^*_{\overline{\lambda}} (\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 < 0)$.

При выводе формулы (3) были использованы упомянутые выше результаты М. А. Наймарка, а также некоторые предложения, установленные в [6,7].

В настоящей заметке дается весьма простое истолкование сложной на первый взгляд формулы (3) и устанавливаются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы операторная функция R_λ была обобщенной резольвентой данного симметрического оператора A.

2. Пусть A — замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$. В дальнейшем достаточно ограничиться рассмотрением того случая, когда оба дефектных числа оператора A отличны от нуля. Как известно, оператор U_λ, определенный при любом невещественном λ формулой

$$U_\lambda = (A - \overline{\lambda}E)(A - \lambda E)^{-1},$$

изометрически отображает подпространство $\mathfrak{R}(A - \lambda E) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_{\overline{\lambda}}$ на подпространство $\mathfrak{R}(A - \overline{\lambda}E) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_\lambda$.

Пусть C — произвольный линейный ограниченный оператор, отображающий $\mathfrak{M}_{\overline{\lambda}}$ в $\mathfrak{M}_\lambda$. Оператор T_λ, определенный на всем $\mathfrak{H}$ формулой

$$T_\lambda(h + \psi) = U_\lambda h + C\psi \quad (h \in \mathfrak{R}(A - \lambda E); \quad \psi \in \mathfrak{M}_{\overline{\lambda}}), \tag{4}$$

будем называть квази-унитарным расширением оператора U_λ. Оператор A_C, определенный на многообразии $\mathfrak{D}(A_C)$ элементов g вида

$$g = f + C\psi - \psi \quad (f \in \mathfrak{D}(A); \quad \psi \in \mathfrak{M}_{\overline{\lambda}})$$

формулой

$$A_C g = Af + \lambda C\psi - \overline{\lambda}\psi,$$

будем называть квази-самосопряженным расширением оператора A, порожденным оператором C*.

Операторы A_C и T_λ связаны соотношением:

$$A_C = (\lambda T_\lambda - \overline{\lambda}E)(T_\lambda - E)^{-1}. \tag{5}$$

Полуплоскость (верхнюю или нижнюю) комплексной плоскости, содержащую невещественное число μ, мы ниже обозначаем через Π_μ.

Лемма 1. *Пусть A_F — квази-самосопряженное расширение замкнутого симметрического оператора A, порожденное оператором F из $\mathfrak{M}_{\overline{\lambda}_0}$ в $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$, не превосходящим по норме единицы.*

Тогда при любом невещественном λ из полуплоскости Π_{λ_0} оператор $A_F - \lambda E$ имеет ограниченный обратный, определенный на всем $\mathfrak{H}$, а оператор

$$X_\lambda = (A_F - \overline{\lambda}E)(A_F - \lambda E)^{-1} \tag{6}$$

есть квази-унитарное расширение оператора U_λ, причем $\| X_\lambda \| = 1$.

Для доказательства вводим в рассмотрение квази-унитарное расширение T_{λ_0} оператора U_{λ_0}, определяемое формулой (4) при $\lambda = \lambda_0$ и

---

* Понятие квази-унитарного и квази-самосопряженного расширения для операторов с равными конечными дефектными числами введено в работах М. С. Лившица [2,3]; см. также [1].

$C=F$. В силу (5) имеем:

$$A_F-\lambda E=[(\bar{\lambda}_0-\lambda)E-(\lambda_0-\lambda)T_{\lambda_0}](E-T_{\lambda_0})^{-1}.$$

Так как $\|T_{\lambda_0}\|=1$ и $|\lambda_0-\lambda|<|\bar{\lambda}_0-\lambda|$, то отсюда вытекают все утверждения леммы, относящиеся к оператору $A_F-\lambda E$. Согласно (5) и (6) находим:

$$X_\lambda=[(\bar{\lambda}_0-\bar{\lambda})E-(\lambda_0-\bar{\lambda})T_{\lambda_0}][(\bar{\lambda}_0-\lambda)E-(\lambda_0-\lambda)T_{\lambda_0}]^{-1}. \qquad (7)$$

С помощью последней формулы легко убедиться, что $\|X_\lambda h\|\leqslant\|h\|$ для всякого $h\in\mathfrak{H}$. Так как X_λ является расширением изометрического оператора U_λ, то из этого неравенства вытекает соотношение $X_\lambda\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}\subset\mathfrak{M}_\lambda$, чем и завершается доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Пусть A_F — такой же, как в лемме* 1. *Тогда при любом невещественном λ из полуплоскости Π_{λ_0} справедлива формула:*

$$(A_F-\lambda E)^{-1}=(A-\lambda E)^{-1}(E-P_{\bar{\lambda}})-\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}P_{\bar{\lambda}}+$$

$$+\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}P_\lambda[(\bar{\lambda}_0-\bar{\lambda})E-(\lambda_0-\bar{\lambda})F]\{P_{\bar{\lambda}}[(\bar{\lambda}_0-\lambda)E-(\lambda_0-\lambda)F]\}^{-1}P_{\bar{\lambda}}. \qquad (8)$$

Действительно, в силу (6) имеем

$$(A_F-\lambda E)^{-1}=\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}(X_\lambda-E),$$

и, следовательно,

$$(A_F-\lambda E)^{-1}=(A-\lambda E)^{-1}(E-P_{\bar{\lambda}})+\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}}(X_\lambda-E)P_{\bar{\lambda}}. \qquad (9)$$

С другой стороны, из (7) находим:

$$X_\lambda P_{\bar{\lambda}}[(\bar{\lambda}_0-\lambda)E-(\lambda_0-\lambda)T_{\lambda_0}]=P_\lambda[(\bar{\lambda}_0-\bar{\lambda})E-(\lambda_0-\bar{\lambda})T_{\lambda_0}]. \qquad (10)$$

Нетрудно убедиться, что если $\lambda\in\Pi_{\lambda_0}$, то подпространство $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}_0}$ отображается оператором $P_{\bar{\lambda}}[(\bar{\lambda}_0-\lambda)E-(\lambda_0-\lambda)T_{\lambda_0}]$ на все подпространство $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}$, и притом взаимно-однозначно. Так как $T_{\lambda_0}\psi=E\psi$ для всякого $\psi\in\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}_0}$, то из (10) следует:

$$X_\lambda P_{\bar{\lambda}}=P_\lambda[(\bar{\lambda}_0-\bar{\lambda})E-(\lambda_0-\bar{\lambda})F]\{P_{\bar{\lambda}}[(\bar{\lambda}_0-\lambda)E-(\lambda_0-\lambda)F]\}^{-1}P_{\bar{\lambda}}.$$

Последним равенством в соединении с (9) доказывается лемма.

Из сопоставления (3) и (8) вытекает теорема 1.

Теорема 1. *Всякая обобщенная резольвента R_λ замкнутого симметрического оператора A имеет вид*

$$R_\lambda=(A_{F(\lambda)}-\lambda E)^{-1}\quad(\operatorname{Im}\lambda\cdot\operatorname{Im}\lambda_0>0), \qquad (11)$$

где $F(\lambda)$ — некоторая регулярная операторная функция из $\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}_0}$ в $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$, не превосходящая по норме единицы, а $A_{F(\lambda)}$ — квази-самосопряженное расширение оператора A, порожденное оператором $F(\lambda)$. Обратно, всякой операторной функцией $F(\lambda)$, обладающей перечисленными свойствами, определяется по формуле (11) *некоторая обобщенная резольвента оператора A.*

Замечание 1. Установленная в ([8]) теорема, согласно которой множество обобщенных резольвент задается формулой (3), содержит указание на то, что различным $F(\lambda)$ соответствуют различные обобщенные резольвенты. Этот факт, доказательство которого было ранее основано на некоторых других предложениях, вытекает теперь непосредственно из равенства (11), так как различным $F(\lambda)$ соответствуют различные квази-самосопряженные расширения $A_{F(\lambda)}$ и, следовательно, различные R_λ.

Замечание 2. Мы ограничились рассмотрением обобщенной резольвенты в полуплоскости Π_{λ_0}, так как для значений λ из другой полуплоскости имеем $R_\lambda = R^*_{\overline{\lambda}}$.

Исходя из соотношения $(A_F)^* = A_{F^*}$, нетрудно сообразить, что формула (11) остается в силе и для другой полуплоскости, если положить $F(\lambda) = F^*(\overline{\lambda})\ (\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 < 0)$.

Теорема 2. *Семейство ограниченных линейных операторов R_λ, действующих в $\mathfrak{H}$ и зависящих от невещественного параметра λ, является обобщенной резольвентой данного симметрического оператора A тогда и только тогда, если выполняются следующие условия: при любом невещественном λ из полуплоскости Π (верхней или нижней) и для всякого $h \in \mathfrak{H}$*

1) $(A^* - \lambda E) R_\lambda h = h$;

2) $\|(A^* - \overline{\lambda} E) R_\lambda h\| \leqslant \|h\|$;

3) $R^*_\lambda = R_{\overline{\lambda}}$;

4) R_λ *есть регулярная операторная функция от λ в полуплоскости* Π*.

Необходимость условия 1) следует из формулы (11); из нее же и леммы 1 вытекает необходимость условия 2) (ср. ([4]), следствие 6).

Необходимость условий 3) и 4) вытекает непосредственно из формулы (1), которой определяется обобщенная резольвента.

Наметим доказательство достаточности перечисленных условий.

Согласно 1), $R_\lambda h \in \mathfrak{D}(A^*)$ при любом $h \in \mathfrak{H}$ и $\lambda \in \Pi$. Принимая во внимание 1) и 2), нетрудно убедиться, что оператор R_λ является расширением оператора $(A - \lambda E)^{-1}$, причем $\|R_\lambda\| \leqslant 1/|\tau|$, где $\tau = \operatorname{Im}\lambda$. Зафиксировав в полуплоскости Π какое-либо невещественное λ_0, мы с помощью леммы 1 показываем, что оператор $B_\lambda = R_\lambda^{-1} + \lambda E$ можно рассматривать как квази-самосопряженное расширение оператора A, порожденное оператором $F(\lambda)$ из $\mathfrak{M}_{\overline{\lambda}_0}$ в $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$, не превосходящим по норме единицы и определенным формулой:

$$F(\lambda)\psi = [E + (\lambda - \overline{\lambda}_0) R_\lambda]\,[E + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda]^{-1}\psi \qquad (\psi \in \mathfrak{M}_{\overline{\lambda}_0}).$$

Условие 4) позволяет установить, что $F(\lambda)$ является регулярной операторной функцией от λ $(\lambda \in \Pi)$. Таким образом, $B_\lambda = A_{F(\lambda)}$, откуда $R_\lambda = (A_{F(\lambda)} - \lambda E)^{-1}$. Так как оператор $F(\lambda)$ обладает всеми перечисленными в теореме 1 свойствами, то последним равенством в соединении с 3) и завершается доказательство того, что R_λ есть обобщенная резольвента оператора A.

Ульяновский государственный
педагогический институт

Поступило
15 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, добавление 1, 1950. [2] М. С. Лившиц, Матем. сборн., **19** (61), в. 2 (1946). [3] М. С. Лившиц, ДАН, **58**, № 1 (1947). [4] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., **4**, № 3 (1940). [5] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., **7**, № 6 (1943). [6] А. В. Штраус, ДАН, **67**, № 4 (1949). [7] А. В. Штраус, ДАН, **70**, № 4 (1950). [8] А. В. Штраус, ДАН, **71**, № 2 (1950).

* Из 3) тогда следует, что R_λ есть регулярная функция параметра λ и в другой полуплоскости.