Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Г. Ш. РУБИНШТЕЙН

ОБ ОТДЕЛЕНИИ И РАЗДЕЛЕНИИ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ ГИПЕРПЛОСКОСТЯМИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 III 1951)

Рассматривается линейное (векториальное) множество ([1]). Предполагаются известными понятия прямой, отрезка, луча*, дополнительного луча.

Множество, содержащее с каждыми двумя своими точками прямую, проходящую через эти точки, называют линейным многообразием Множество, содержащее с каждыми двумя своими точками отрезок, соединяющий эти точки, называют выпуклым множеством.

Выпуклое множество, содержащее с каждой своей точкой проходящий через эту точку луч с некоторой фиксированной вершиной x_0, называют конусом с вершиной x_0. Множество дополнительных лучей конуса K с вершиной x_0 является конусом с той же вершиной, который называют конусом, дополнительным к K, и обозначают через $\tilde{K}$.

Линейное многообразие, отличное от всего пространства и не содержащееся как правильная часть ни в каком другом линейном многообразии, кроме всего пространства, называют гиперплоскостью.

Можно показать, что множество, дополнительное к гиперплоскости, однозначно представимо в виде теоретико-множественной суммы двух непересекающихся выпуклых множеств, каждое из которых однозначно определяет второе и исходную гиперплоскость. Эти множества называют открытыми полупространствами. Присоединяя к открытому полупространству соответствующую гиперплоскость, получим так называемое замкнутое полупространство.

Пусть $M \subset E$. Точку $x \in M$ назовем (*)-внутренней точкой M, если x является внутренней точкой пересечения M с произвольной прямой, проходящей через x**. Множество, все точки которого (*)-внутренние, назовем (*)-открытым.

Система (*)-открытых множеств определяет в E топологию, которую в дальнейшем будем называть (*)-топологией. E в этой топологии является связным пространством. Открытое полупространство является (*)-открытым, а соответствующее замкнутое полупространство — его (*)-замыканием.

Выпуклое множество, содержащее хотя бы одну (*)-внутреннюю точку, называют выпуклым телом. Множество (*)-внутренних точек выпуклого тела M является (*)-открытым выпуклым множеством, плотным в M.

---

* Считаем, что вершина не принадлежит лучу.

** Это понятие впервые введено Ю. Сирвинтом ([2]).

Множество (*)-внутренних точек конуса K является (*)-открытым конусом с той же вершиной, причем дополнительный к нему конус есть множество (*)-внутренних точек $\tilde{K}$.

Очевидно, что замкнутое полупространство является (*)-замкнутым конусом, содержащим от каждой прямой, проходящей через его вершину, по крайней мере один луч (за вершину этого конуса может быть принята произвольная точка соответствующей гиперплоскости). Справедлива и обратная теорема.

Теорема. *Если (*)-замкнутый конус отличен от всего пространства и содержит от каждой прямой, проходящей через его вершину, по крайней мере один луч, то он является замкнутым полупространством.*

Говорят, что гиперплоскость H отделяет множество M, если M содержится в одном из замкнутых полупространств, определяемых H. Говорят, что гиперплоскость H разделяет два множества, если они принадлежат различным замкнутым полупространствам, определяемым H.

В настоящей заметке устанавливается справедливость предложений, аналогичных доказанным ранее Мазуром (3) и Эйдельгайтом (4) для случая нормированных пространств.

Теорема А. *Если линейное многообразие L не содержит (*)-внутренних точек выпуклого тела M, то существует гиперплоскость H, содержащая L и отделяющая M.*

Теорема Б. *Если выпуклое множество M не содержит (*)-внутренних точек выпуклого тела N, то существует гиперплоскость, разделяющая M и N.*

При доказательстве будем опираться на лемму Цорна.

Если в непустом частично упорядоченном множестве X каждое упорядоченное подмножество имеет верхнюю грань, то в X существует по крайней мере один максимальный элемент, т. е. такой элемент x_0, который не предшествует никакому другому элементу $x \in X$.

Перейдем к доказательству теорем А и Б.

Лемма. *Пусть K_1 и K_2 — два конуса с общей вершиной x_0, причем K_2 — (*)-открытое множество, $K_1 \cap K_2 = \Lambda$, $\tilde{K}_2 \subset K_1$. Тогда существует гиперплоскость H, разделяющая K_1 и K_2.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{K\}$ конусов с вершиной x_0 и удовлетворяющих условиям: 1) $K_1 \subset K$; 2) $K_2 \cap K = \Lambda$. $\mathfrak{M}$ удовлетворяет лемме Цорна; поэтому в $\mathfrak{M}$ существует по крайней мере один максимальный элемент K_0.

С другой стороны: 1) если $K \in \mathfrak{M}$, то $\overline{K}^{(*)} \in \mathfrak{M}$; 2) если $K \in \mathfrak{M}$ не содержит ни одного из лучей некоторой поямой П, проходящей через x_0, то наименьший конус с вершиной x_0, содержащий K и один из лучей прямой П, также принадлежит $\mathfrak{M}$.

Поэтому K_0, как максимальный элемент $\mathfrak{M}$, есть не совпадающий со всем пространством (*)-замкнутый конус, содержащий от каждой прямой, проходящей через его вершину, по крайней мере один луч. Т. е. K — замкнутое полупространство, а тогда ему соответствующая гиперплоскость разделяет K_1 и K_2.

Доказательство теоремы А. Пусть x_0 — произвольная точка L. Наименьший конус с вершиной x_0, содержащий $M \cup L$, обозначим через K_1, (*)-внутреннее ядро $\tilde{K}_1$ обозначим через K_2. K_1 и K_2 удовлетворяют условиям леммы; поэтому существует гиперплоскость H, разделяющая K_1 и K_2. Эта гиперплоскость содержит L и отделяет M.

Доказательство теоремы Б. Рассмотрим множество P, дополнительное к множеству (*)-внутренних точек N. Это множество P — (*)-замкнутое множество. Точку $x \in P$, для которой существует луч с вершиной x, содержащий и (*)-внутренние точки N и точки M, назовем точкой первого рода; остальные точки P — точками второго рода. Так как множество точек первого рода (*)-открыто, то (на основании связности E) существует по крайней мере одна точка x_0 второго рода.

Наименьший конус с вершиной x_0, содержащий (*)-внутренние точки N, обозначим через K_2. Наименьший конус с вершиной x_0, содержащий $M \cup \bar{K}_2$, обозначим через K_1. Конусы K_1 и K_2 удовлетворяют условиям леммы; поэтому существует гиперплоскость H, разделяющая K_1 и K_2. Эта гиперплоскость разделяет M и N.

Эти доказательства можно несколько упростить. Так например, теорему Б можно получить непосредственно из теоремы А, воспользовавшись рассуждениями В. Л. Шмульяна ([5]). Но приведенные доказательства нам кажутся целесообразными, так как они без особого труда переносятся на пространства более общей природы, содержащие как линейные пространства, так и пространства абсолютной геометрии.

Поступило
7 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948. [2] Ю. Сирвинт, Изв. АН СССР, сер. матем., 6, 143 (1942). [3] S. Mazur, Studia Math., 4, 70 (1933). [4] E. Edelheit, ibid., 6, 104 (1936). [5] М. Крейн и М. Рутман, Усп. матем. наук, 3, в. 1 (23) (1948).