Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Б. Н. РАХМАНОВ

К ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 10 III 1951)

Рассмотрим классы функций:
I. Класс K функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

однолистных, регулярных в $|z| < 1$ и отображающих круг $|z| < 1$ на выпуклые области.

II. Класс S функций

$$F(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots$$

однолистных, регулярных в $|z| < 1$, отображающих круг $|z| < 1$ на звездообразные относительно точки $w = 0$ области.

Если $f(z) \in K$, то $F(z) = zf'(z) \in S$ и обратно.

III. Класс функций $K + S$

$$\Phi_\alpha(z) = \frac{1}{1 + e^{i\alpha}} [f(z) + e^{i\alpha} z f'(z)], \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2},$$

где функция $f(z) \in K$.

§ 1. Теорема 1. *Функции $\Phi_\alpha(z)$ класса $K+S$ однолистны в круге $|z| < 1$.*

Доказательство основывается на следующей лемме.

Лемма. *Пусть точка P описывает в положительном направлении простую замкнутую выпуклую кривую C, окружающую точку O, с непрерывно вращающейся касательной, а точка Q — простую замкнутую звездообразную* (1) *относительно точки O кривую C_1. Если точку Q выбрать на перпендикуляре, опущенном из точки O на касательную к кривой C в точке P, и если вектор*

$$\overline{OM} = \overline{OP} + e^{i\alpha} \overline{OQ}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2},$$

то точка M описывает простую замкнутую кривую.

Доказательство леммы следует непосредственно из построения. Для доказательства теоремы заметим, что так как функции $w = f(z)$ и $w = zf'(z)$ принадлежат, соответственно, к классам K и S, то при отображении круга $|z| < r$, $r < 1$, этими функциями границы отображенных областей будут удовлетворять условиям леммы.

Следовательно, функция $\Phi_\alpha(z)$ отображает окружность $|z| = r$, $r < 1$, на простую замкнутую кривую Г. По известной теореме, функция $\Phi_\alpha(z)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между точками круга $|z| \leqslant r$ и точками, лежащими внутри контура Г. В силу произвольности $r < 1$ $\Phi_\alpha(z)$ однолистна в $|z| < 1$.

Теорема доказана.

Интересно отметить, что функция

$$\Phi_{\pi/2}(z)=\frac{1}{1+i}\left[\frac{z}{1-z}+i\frac{z}{(1-z)^2}\right]=z+\rho_2z^2+\rho_3z^3+\dots$$

обладает тем свойством, что $|2\beta_3-\beta_2^2|>2$ (2).

Полагая $\alpha=0$, получим:

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2}[f(z)+zf'(z)]. \tag{1}$$

Для оценки радиуса выпуклости R_K и радиуса звездообразности R_S функций семейства $\Phi_0(z)$ имеем следующий результат.

Теорема 2. *Функции* $\Phi_0(z)=\frac{1}{2}[f(z)+zf'(z)]$, *где* $f(z)\in K$, *выпуклы в круге* $|z|\leqslant\frac{\sqrt{5}}{5}$ *и звездообразны в круге* $|z|\leqslant\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

В доказательстве используется преобразование известных оценок для $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$, где $f(z)\in K$, и лемма Шварца.

Таким образом, имеем:

$$0{,}446\ldots=\frac{\sqrt{5}}{5}\leqslant R_K\leqslant 0{,}5,$$

$$0{,}894\ldots=\frac{2\sqrt{5}}{5}\leqslant R_S\leqslant\sqrt{\frac{7}{8}}=0{,}935\ldots,$$

где оценки справа дает функция (1) с $f(z)=\frac{z}{1-z}$.

§ 2. Теорема 3. *Если* $f(z)\in K$, *то функция*

$$F_\alpha(z)=\frac{f(e^{i\alpha}z)-f(e^{-i\alpha}z)}{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}},\quad 0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2},$$

звездообразна в $|z|<1$.

Доказательство вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Пусть A и B — две точки, движущиеся в положительном направлении по простой замкнутой выпуклой кривой C, так что точка B не совпадает с точкой A и точки A и B возвращаются при таком движении в начальное положение.*

Тогда вектор $\overline{OM}$, *имеющий фиксированное начало и равный вектору* $\overline{AB}$, *вращается в положительном направлении и точка M описывает звездообразную относительно точки O замкнутую кривую.*

Непосредственно очевидно, что вектор $\overline{OM}$ вращается в положительном направлении и точка M описывает замкнутую кривую.

Из теоремы 3 имеем:

Функция $F_1(z)=\frac{1}{2}[f(z)-f(-z)]=z+a_3z^3+a_5z^5+\dots$ однолистна и звездообразна в $|z|<1$.

Для таких функций справедливы известные оценки $|F_1(z)|$, $|F_1'(z)|$, $\left|\frac{zF_1'(z)}{F_1(z)}\right|$ и радиус выпуклости для них $R_K=\sqrt{2}-1$ (3).

§ 3. Теорема 4. *Если функция* $F(z)=z+c_2z^2+c_3z^3+\dots$ *однолистна и регулярна в* $|z|<1$ *и для нее справедливо неравенство*

$$\left|\arg\frac{zF'(z)}{F(z)}\right|\leqslant\frac{\pi}{4},\quad |z|<1,$$

то

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{1/2} \leqslant R\,\frac{zF'(z)}{F(z)} \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/2},$$

$$\left|\arg\frac{zF'(z)}{F(z)}\right| \leqslant \operatorname{arc\,tg} r,$$

$$\frac{2r}{1+\sqrt{1-r^2}}\,e^{-\arcsin r} \leqslant |F(z)| \leqslant \frac{2r}{1+\sqrt{1-r^2}}\,e^{\arcsin r},$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{1/2} e^{-\arcsin r} \leqslant |F'(z)| \leqslant \frac{2}{1+\sqrt{1-r^2}}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/2} e^{\arcsin r}$$

и радиус выпуклости

$$R_K = 0{,}46\ldots$$

Доказательство основано на использовании леммы Шварца и свойств овалов Кассини. Радиус выпуклости находится при помощи одной леммы, указанной Г. М. Голузиным [3].

Все оценки в теореме 4 точные; достигаются функцией

$$F(z) = \frac{2z}{1+\sqrt{1-z^2}}\,e^{\arcsin z}.$$

Поступило
7 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Полиа и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, 1937. [2] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 12 (54): 1 (1943). [3] Г. М. Голузин, Матем. сборн., 42, № 2 (1935).