Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Э. Г. ПОЗНЯК

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ МНОГОУГОЛЬНЫХ ЖЕЛОБОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 15 III 1951)

1. Рассматриваются бесконечно малые изгибания поверхности X, определенной следующим образом: 1) поверхность X получается последовательным склеиванием регулярных цилиндрических поверхностей X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, каждая из которых ограничена двумя своими прямолинейными образующими и двумя кривыми L_{1i} и L_{2i}; склеивание поверхностей X_i и X_{i+1} происходит по кривым L_{2i} и $L_{1, i+1}$ (поверхности X_1 и X_n склеиваются по кривым L_{11} и L_{2n}); 2) прямолинейные образующие каждого цилиндра X_i параллельны фиксированной плоскости π.

Такую поверхность X будем называть многоугольным желобом.

Как видно из определения, многоугольный желоб представляет собой поверхность с особенностями: кривые, по которым склеиваются цилиндры X_i, являются ребрами многоугольного желоба.

При исследовании бесконечно малых изгибаний такого рода поверхности можно ставить две различные задачи. Именно, рассматривая бесконечно малые изгибания такой поверхности при условии регулярности поля скоростей на ее регулярных частях, включая их границу, можно, сверх того: 1) ограничиться требованием однозначности на ребрах поля скоростей, 2) кроме требования однозначности поля скоростей требовать также однозначности на ребрах поля вращений *.

Эти задачи различны, т. е. одна и та же поверхность может быть жесткой в предположении однозначности на ребрах поля вращений и нежесткой, если предполагать на ребрах однозначность только поля скоростей.

В настоящей заметке даны необходимые и достаточные условия жесткости многоугольных желобов в предположении однозначности поля вращений, а также показано, что треугольный желоб в предположении однозначности только поля скоростей является жесткой поверхностью. Кроме того, указаны некоторые другие результаты.

2. Сформулируем некоторые предложения о бесконечно малых изгибаниях развертывающихся поверхностей.

---

* Из требования однозначности поля скоростей не следует однозначность поля вращений. Так, если $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ — векторы вращений двух регулярных частей поверхности в одной и той же точке ее ребра, то в силу однозначности поля скоростей вдоль ребра будем иметь $[\mathbf{y}_1 d\mathbf{x}] = [\mathbf{y}_2 d\mathbf{x}]$, т. е. $\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 = \mu \mathbf{t}$, где $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной ребра. Таким образом, требование однозначности поля вращений эквивалентно требованию стационарности угла между касательными плоскостями к регулярным частям поверхности в одной и той же точке ее ребра.

Пусть X — трижды непрерывно дифференцируемая развертывающаяся поверхность, $\mathbf{z}$ — поле скоростей некоторого ее бесконечно малого изгибания.

Теорема 1. *Если поверхность X не является плоскостью, то поле $\mathbf{z}$ вдоль прямолинейной образующей поверхности X представляет собой поле скоростей движения этой образующей как твердого тела.*

Пусть поверхность X получена склеиванием цилиндров X_1 и X_2 по кривой L; $\mathbf{z}$ — поле скоростей бесконечно малого изгибания поверхности X; $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ — соответствующие поля вращений поверхностей X_1 и X_2 в точке P ребра L; тогда $\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 = \mu \mathbf{t}$, где $\mathbf{t}$ — единичный вектор касательной ребра L.

Лемма 1. *Число μ равно нулю тогда и только тогда, когда при бесконечно малом изгибании поверхности X стационарен угол между прямолинейными образующими, исходящими из точки P.*

Рассмотрим теперь многоугольный желоб X. Сечение этого желоба плоскостью, параллельной указанной выше плоскости π, представляет собой замкнутый многоугольник $P_1P_2\ldots P_n$ (возможно, и самопересекающийся). Будем в дальнейшем приписывать площади такого многоугольника знак в зависимости от обхода многоугольника.

Лемма 2. *Если нетривиальное поле вращений $\mathbf{y}$ многоугольного желоба однозначно на ребрах, то конец вектора вращений $\mathbf{y}$, рассматриваемого вдоль многоугольника $P_1P_2\ldots P_n$, описывает многоугольник $Q_1Q_2\ldots Q_n$, подобный многоугольнику $P_1P_2\ldots P_n$ и подобно с ним расположенный.*

Обозначим через $\alpha(u)$ коэффициент подобия многоугольников $P_1P_2\ldots P_n$ и $Q_1Q_2\ldots Q_n$ (u — параметр ребра L_{11} многоугольного желоба X).

Лемма 3. *Если при каком-либо фиксированном значении параметра $u = u_0$ будет $\alpha(u_0) = 0$, то $\alpha(u) \equiv 0$.*

При доказательстве этих лемм используется теорема 1.

3. Приведем основные предложения, относящиеся к бесконечно малым изгибаниям многоугольных желобов.

Теорема 2. *При условии однозначности на ребрах поля вращений достаточным условием жесткости многоугольного желоба является существование хотя бы одного многоугольника $P_1P_2\ldots P_n$ с отличной от нуля площадью.*

Действительно, предполагая поле вращений $\mathbf{y}$ желоба нетривиальным, будем иметь, в силу леммы 2, вдоль многоугольника $P_1P_2\ldots P_n$ равенство $\mathbf{y} = \alpha(u^*)\,\mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ — радиус-вектор точки многоугольника $P_1P_2\ldots P_n$. Поле скоростей вдоль этого многоугольника определится выражением $\int [\mathbf{y}\,d\mathbf{x}] = \alpha(u^*) \int [\mathbf{x}\,d\mathbf{x}]$, где интегрирование производится вдоль многоугольника $P_1P_2\ldots P_n$. Таким образом, предполагая $\alpha(u^*) \neq 0$, получим неоднозначное поле скоростей, ибо $\left| \int\limits_{(P_1P_2\ldots P_n)} [\mathbf{x}\,d\mathbf{x}] \right| > 0$, так как этот интеграл выражает площадь многоугольника $P_1P_2\ldots P_n$. Для однозначности поля скоростей нужно, следовательно, положить $\alpha(u^*) = 0$, а тогда, в силу леммы 3, $\alpha(u) \equiv 0$, т. е. $\mathbf{y} \equiv 0$.

Следствие. *Каждый несамопересекающийся многоугольный желоб при условии однозначности на ребрах поля вращений является жесткой поверхностью.*

Теорема 3. *Для существования на многоугольном желобе однозначного нетривиального поля вращений необходимо и достаточно, чтобы все многоугольники $P_1P_2\ldots P_n$ были подобны между собой.*

Необходимость следует из леммы 2. В случае же, если все многоугольники подобны, то строится нетривиальное однозначное поле вращений.

Теорема 4. *Необходимым и достаточным условием жесткости многоугольного желоба при условии однозначности поля вращений является совокупность следующих двух условий:* 1) *существование, по крайней мере, одного многоугольника $P_1P_2\ldots P_n$ с отличной от нуля площадью,* 2) *существование, по крайней мере, двух таких многоугольников, не подобных друг другу.*

Эта теорема следует из теорем 2 и 3.

Теорема 5. *Треугольный желоб в предположении однозначности только поля скоростей является жесткой поверхностью.*

Действительно, в силу теоремы 1 и леммы 1 вдоль каждого ребра треугольного желоба $\mu = 0$, т. е. из однозначности поля скоростей следует однозначность поля вращений, а поэтому, в силу теоремы 2, треугольный желоб будет жесткой поверхностью.

4. Заметим, что установленные здесь теоремы о жесткости относятся не только к желобу, как в заданному объекту, но и к любой сколь угодно узкой части желоба (если только эта часть сама является замкнутым желобом). Таким образом, эти теоремы относятся к поверхности, определенной лишь «частично в целом».

Бесконечно малые изгибания поверхностей, определенных частично в целом, впервые исследовались Рембсом [1] (см. также [2]). Им была доказана жесткость второго порядка плоского замкнутого гладкого желоба в предположении аналитичности как самого желоба, так и полей, определяющих его деформацию.

В настоящей заметке показано, что явление жесткости может иметь место для поверхностей, определенных частично в целом без предположения аналитичности как рассматриваемых поверхностей, так и полей деформаций.

5. Приведем некоторые предложения, относящиеся к бесконечно малым изгибаниям склеенных полуцилиндров (полуцилиндр — поверхность, полученная поступательным движением полупрямой).

Теорема 6. *Поверхность X, полученная склеиванием полуцилиндров при условии ограниченности в бесконечности поля вращений, будет жесткой в том и только в том случае, когда полуцилиндры в некоторой точке P ребра L, по которому они склеены, имеют общую касательную плоскость.*

Эта теорема с помощью леммы 1 обобщается на случай, когда кривая L имеет угловые точки.

Поступило
15 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Rembs, Math. Zs., **36** (1932). [2] Н. Ефимов, Усп. матем. наук, **3**, в. 2 (24) (1948).