Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

И. И. ОГИЕВЕЦКИЙ

ОБ ОДНОЙ ТОЧНОЙ ОЦЕНКЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 II 1951)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна, имеет период 2π и модуль ее r-й производной не превышает единицы ($f \in W^r$). С помощью матрицы

$$\begin{matrix} q_{00}\, q_{01}\, q_{02} \cdots q_{0N_0} \\ q_{10}\, q_{11}\, q_{12} \cdots q_{1N_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ q_{n0}\, q_{n1}\, q_{n2} \cdots q_{nN_n} \\ \cdots\cdots\cdots \end{matrix} \tag{1}$$

образуем q_{nk}-среднее ее ряда Фурье

$$U_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N_n} q_{nk}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{2}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

В [1,2] было найдено асимптотическое значение

$$\max_{f \in W^r} \sup_{0<x<2\pi} |f(x) - U_n(f, x)| \tag{3}$$

в случае, когда $U_n(f, x)$, соответственно, частные суммы ряда Фурье и их арифметические средние. В [3] было дано точное значение (3) в случае, когда $U_n(f, x)$ — чезаровские средние целых порядков ряда Фурье.

В настоящей заметке мы, развивая методы [3,5], получаем точное значение для (3) в случае одного общего класса матриц, включающего ряд известных методов суммирования.

Теорема. *Пусть матрица* (1) *удовлетворяет условиям*

1. $1 + \sum_{k=1}^{N_n} q_{nk} \cos kx \geqslant 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

2. $q_{n0} = 1, \quad 1 > q_{nk} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N_n - 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда

$$\max_{f\in W^r} \sup |f(x) - U_n(f, x)| = K_n - \sum_{\nu=0}^{N'} q_{n,2\nu+1}(-1)^{\nu(r+1)} \frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}},$$

$K_n = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu(r+1)}\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}}$ *— постоянная Ахиезера — Крейна — Фавара* ([5]), N' *— наибольшее целое, меньшее* $\frac{N_n-1}{2}$.

Введем функции

$$\varphi_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^r}, \quad \psi_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^r},$$

являющиеся при $r=1$ рядами Фурье, соответственно, для функций $-\log\left\{2\sin\frac{x}{2}\right\}$ и $\frac{\pi-x}{2}$.

Положим

$$\Psi_{r,N_n}(x) = \psi_r(x) - \sum_{k=1}^{N_n} q_{nk}\frac{\sin kx}{k^r}, \quad \Phi_{r,N_n}(x) = \varphi_r(x) - \sum_{k=1}^{N_n} q_{nk}\frac{\cos kx}{k^r}.$$

Функция $\Psi_{1,N_n}(x)$ нечетна, обращается в нуль при $x=\pi$, убывает при $0<x<2\pi$. Поэтому $\operatorname{sgn}\Psi_{1,N_n}(x) = \operatorname{sgn}\sin x$.

Из $\{\Psi_{3,N_n}(x)\}'' = -\Psi_{1,N_n}(x)$ следует, что $\Psi_{3,N_n}(x)$ выпукла кверху при $0<x<\pi$. Далее, $\Psi_{3,N_n}(x)$ нечетна и обращается в нуль при $x=0$, $x=\pi$. Поэтому $\operatorname{sgn}\Psi_{3,N_n}(x) = \operatorname{sgn}\sin x$.

Рассуждая аналогично, убедимся, что при любом нечетном r $\operatorname{sgn}\Psi_{r,N_n}(x) = \operatorname{sgn}\sin x$.

В ([4]) показано, что для непрерывной положительной выпуклой кверху функции на $(0, \pi)$ $U_n(f, x)$ не превосходит $f(x)$, где q_{nk} удовлетворяют условиям, сформулированным в теореме.

Так как, кроме того, $\psi_2(x)$ нечетна, то, следовательно, $\operatorname{sgn}\Psi_{2,N_n}(x) = \operatorname{sgn}\{\psi_2(x) - U(\psi_2, x)\} = \operatorname{sgn}\sin x$. Так как $\{\Psi_{4,N_n}(x)\}'' = -\Psi_{2,N_n}(x)$ и $\Psi_{4,N_n}(x)$ нечетна, обращается в нуль при $x=0$, $x=\pi$, то $\operatorname{sgn}\Psi_{4,N_n}(x) = \operatorname{sgn}\sin x$.

Рассуждая аналогично, убедимся, что при любом четном r $\operatorname{sgn}\Psi_{r,N_n}(x) = \operatorname{sgn}\sin x$.

Итак, для всех $r = 1, 2, 3, \ldots$

$$\operatorname{sgn}\Psi_{r,N_n}(x) \operatorname{sgn}\sin x.$$

Производная $\Phi_{r,N_n}(x)$

$$\{\Phi_{r,N_n}(x)\}' = -\Psi_{r-1,N_n}(x)$$

отрицательна при $0<x<\pi$, положительна при $\pi<x<2\pi$. Из этого и из $\Phi_{r,N_n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \Phi_{r,N_n}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ следует, что

$$\operatorname{sgn}\left\{\Phi_{r,N_n}(x) - \Phi_{r,N_n}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} = \operatorname{sgn}\cos x, \qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

Очевидно, не теряя общности, можно принять, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Так как $f \in W^r$, то

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

$$(-1)^{r/2} f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^r (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad r \text{ четное};$$

$$(-1)^{(r+1)/2} f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^r (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad r \text{ нечетное}.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} f(x) - U_n(f, x) &= \frac{(-1)^{r/2}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^{(r)}(x+y)\,\Phi_{r, N_n}(y)\,dy, \quad r \text{ четное};\\ f(x) - U_n(f, x) &= \frac{(-1)^{(r+1)/2}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^{(r)}(x+y)\,\Psi_{r, N_n}(y)\,dy, \quad r \text{ нечетное}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Введем функцию $f_r^*(x)$, принадлежащую классу W^r:

$$f_r^*(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu(r+1)} \frac{\cos(2\nu+1)x}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Отсюда

$$\left(f_r^*(x)\right)^{(r)} = \begin{cases} (-1)^{r/2}\operatorname{sgn}\cos x, & r \text{ четное};\\ (-1)^{(r+1)/2}\operatorname{sgn}\sin x, & r \text{ нечетное}; \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}\cos x = (-1)^{r/2}\left(f_r^*(x)\right)^{(r)} = \operatorname{sgn}\Phi_{r, N_n}(x), \qquad r \text{ четное};$$

$$\operatorname{sgn}\sin x = (-1)^{(r+1)/2}\left(f_r^*(x)\right)^{(r)} = \operatorname{sgn}\Psi_{r, N_n}(x), \qquad r \text{ нечетное}.$$

Без потери общности можно принять в (4) $x = 0$ (так как соответствующим сдвигом графика всегда можно добиться, чтобы $\sup|f(x) - U_n(f, x)|$ достигался для $x = 0$). Вследствие этого из (4) вытекает для $f \in W^r$

$$|f(0) - U_n(f, 0)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\Phi_{r, N_n}(y)|\,dy =$$

$$= \frac{(-1)^{r/2}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} (f_r^*(y))^{(r)}\Phi_{r, N_n}(y)\,dy = f_r^*(0) - U_n(f_r^*, 0), \qquad r \text{ четное};$$

$$|f(0) - U_n(f, 0)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\Psi_{r, N_n}(y)|\,dy =$$

$$= \frac{(-1)^{(r+1)/2}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} (f_r^*(y))^{(r)}\,\Psi_{r, N_n}(y)\,dy = f_r^*(0) - U_n(f_r^*, 0), \qquad r \text{ нечетное}.$$

Следовательно,

$$\max_{f \in W^r} \sup_{0 < x < 2\pi} |f(x) - U_n(f, x)| = K_n - \sum_{\nu=0}^{N'} q_{n,\,2\nu+1} (-1)^{\nu(r+1)} \frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}},$$

где N' — наибольшее целое, меньшее $\frac{N_n - 1}{2}$, K_n — постоянная Ахиезера — Крейна — Фавара.

Сформулированным в теореме условиям удовлетворяют методы суммирования Гельдера, Чезаро (C,δ), $\delta \geqslant 1$ (в ([3]) рассмотрены δ целые), Валле-Пуссена, Джексона.

Можно показать, что полученные результаты остаются справедливыми для бесконечных матриц, удовлетворяющих условиям, аналогичным сформулированным в начале статьи. (Случай, соответствующий одной из матриц подобного типа — матрице метода суммирования Абеля, рассмотрен в ([7])).

Автор выражает благодарность С. М. Никольскому и И. Е. Огиевецкому за интерес к работе и замечания.

Поступило
24 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров., Ann. Math., **36**, 521 (1935). [2] С. М. Никольский, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, **15** (1945). [3] B. V. SZ. Nagy, Acta Szeged., **9**, 253 (1940). [4] И. И. Огиевецкий, ДАН, **78**, № 1 (1951). [5] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, 1947. [6] Г. М. Сафронова, ДАН, **73**, 277 (1950). [7] А. Ф. Тиман, ДАН, **74**, 17 (1950).