Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Г. Ф. ЛАПТЕВ

О ПОЛЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА ПОГРУЖЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 III 1951)

1. В настоящем сообщении я ограничиваюсь рассмотрением произвольных погруженных многообразий в однородных пространствах с конечной фундаментальной группой. Исследование носит локальный характер. Все встречающиеся функции предполагаются аналитическими в рассматриваемых областях. Основным аналитическим аппаратом является исчисление внешних дифференциальных форм ([1]). Основная идея состоит в сведении дифференциально-геометрического исследования многообразия к изучению полей геометрических объектов, получаемых из некоторого исходного поля путем продолжений и охватов ([2]).

2. Пусть r-членная непрерывная группа G определена своими базисными инвариантными формами $\omega^{s_{12}}$, связанными структурными уравнениями Картана

$$D\omega^{s_{12}} = \frac{1}{2} C^{s_{12}}_{p_{12}q_{12}} [\omega^{p_{12}q_{12}}] \quad (p_{12}, q_{12}, s_{12} = 1, \ldots, r). \tag{1}$$

Внешняя дифференциальная форма группового пространства

$$\Omega = C_{p_{12}\ldots t_{12}} [\omega^{p_{12}} \ldots \omega^{q_{12}}]$$

является инвариантной формой тогда и только тогда, когда коэффициенты $C_{p_{12}\ldots t_{12}}$ ее разложения по базисным инвариантным формам постоянны.

Группу G с зафиксированной подгруппой H (не содержащей нормальных делителей группы G) назовем абстрактным геометрическим элементом GH с фундаментальной группой G и опорной подгруппой H. При этом геометрические элементы с сопряженными опорными подгруппами мы будем считать эквивалентными.

Всякая подгруппа группы G определяется с точностью до сопряженности вполне интегрируемой пфаффовой системой, образованной приравниванием нулю некоторых инвариантных форм, и обратно.

Линейно независимые инвариантные формы, обращение которых в нуль определяет опорную подгруппу H, мы примем за базисные инвариантные формы

$$\omega^{s_1} \quad (p_1, q_1, s_1 = 1, \ldots, \mathfrak{r})$$

и назовем их первичными, а остальные базисные инвариантные формы

$$\omega^{s_2} \quad (p_2, q_2, s_2 = \mathfrak{r} + 1, \ldots, r)$$

вторичными.

Функции, фиксация которых является условием обращения в нуль всех первичных форм ω^{s_1}, мы назовем первичными групповыми параметрами геометрического элемента, а остальные функционально независимые групповые параметры — вторичными.

3. Точку $X^1, \ldots, X^N$ пространства какого-либо представления опорной подгруппы H геометрического элемента GH мы будем называть геометрическим объектом этого элемента.

При этом опорную подгруппу H будем аналитически представлять как группу преобразований «относительных координат» (компонент) $X^1, \ldots, X^N$ объекта.

В частности, всякий геометрический образ любого однородного пространства, фундаментальная группа которого содержит данную опорную подгруппу H, является геометрическим объектом элемента GH. Многообразие всех образов, эквивалентных данному относительно опорной подгруппы H, является соответствующим пространством представления этой подгруппы.

Система функций $X^1, \ldots, X^N$ определяет геометрический объект геометрического элемента GH, если на этом элементе она удовлетворяет следующей вполне интегрируемой пфаффовой системе

$$\omega^{s_1} = 0, \quad dX^J = \Xi^J_{p_2}(X)\,\omega^{p_2}. \tag{2}$$

Эту систему мы назовем системой дифференциальных уравнений рассматриваемого геометрического объекта.

Особое значение имеют линейные однородные объекты («тензоры»). Такой объект представляется точкой пространства, в котором опорная подгруппа H реализована как группа линейных однородных преобразований. Система дифференциальных уравнений такого объекта (и только такого) имеет вид

$$\omega^{s_1} = 0, \quad dX^J = K^J_{Lp_2} X^L \omega^{p_2}, \tag{3}$$

где $K^J_{Lp_2}$ — константы.

4. Абстрактным погруженным многообразием геометрических элементов мы назовем аналитическое подпространство пространства первичных параметров «образующего» геометрического элемента.

На погруженном многообразии первичные формы ω^{s_1} связаны системой линейных зависимостей, которой мы придадим вид

$$\omega^{\tilde{s}_1} = \Lambda^{\tilde{s}_1}_{\hat{p}_1} \omega^{p_1} \quad (\hat{p}_1, \hat{q}_1, \hat{s}_1 = 1, \ldots, \mathfrak{n};\ \tilde{p}_1, \tilde{q}_1, \tilde{s}_1 = \mathfrak{n}+1, \ldots, \mathfrak{r}) \tag{4}$$

и которую назовем системой дифференциальных уравнений погруженного многообразия.

Во всяком однородном пространстве с фундаментальной группой G абстрактное погруженное многообразие геометрических элементов GH реализуется как геометрическое место эквивалентных между собою геометрических образов, для каждого из которых опорная подгруппа H является стационарной подгруппой.

Мы скажем, что система функций $X^1, \ldots, X^N$ определяет на погруженном многообразии (4) поле геометрического объекта, если эта система функций удовлетворяет пфаффовой системе

$$\omega^{\tilde{s}_1} = \Lambda^{\tilde{s}_1}_{\hat{p}_1} \omega^{\hat{p}_1}, \quad dX^J = \Xi^J_{p_2}(X)\,\omega^{p_2} + X^J_{\hat{p}_1} \omega^{\hat{p}_1}, \tag{5}$$

которая при фиксации всех первичных параметров превращается в систему дифференциальных уравнений некоторого «образующего» геометрического объекта.

Мы скажем, что одно поле геометрического объекта Y^α охватывается другим полем X^J, если компоненты первого можно представить как функции от компонент второго

$$Y^{\alpha} = F^{\alpha}(X). \tag{6}$$

Система (6) функций Y^{α} от компонент поля геометрического объекта X^J определяет поле геометрического объекта в том и только в том случае, если она удовлетворяет системе дифференциальных уравнений вида

$$\omega^{s_1} = \Lambda^{s_1}_{\hat{p}_1}\omega^{\hat{p}_1}, \quad dY^{\alpha} = H^{\alpha}_{p_2}(Y)\,\omega^{p_2} + Y^{\alpha}_{\hat{p}_1}\omega^{\hat{p}_1}. \tag{7}$$

5. Т е о р е м а о п р о д о л ж е н и я х п о л е й о б ъ е к т о в. *Система дифференциальных уравнений* (5) *поля геометрического объекта правильно продолжаема относительно независимых на многообразии первичных форм* $\omega^{\hat{p}_1}$, *т. е. после* ν *продолжений она принимает вид*

$$\omega^{\widetilde{s_1}} = \Lambda^{\widetilde{s_1}}_{\hat{p}_1}\omega^{\hat{p}_1},$$

$$d\Lambda^{\widetilde{s_1}}_{\hat{p}_1^1\ldots\hat{p}_1^{\varkappa}} = \Phi^{\widetilde{s_1}}_{\hat{p}_1^1\ldots\hat{p}_1^{\varkappa}p_2}\,\omega^{p_2} + \Lambda^{\widetilde{s_1}}_{\hat{p}_1^1\ldots\hat{p}_1^{\varkappa}\hat{p}_1}\,\omega^{\hat{p}_1},$$

$$[dX^{s_1}_{\hat{p}_1^1\ldots\hat{p}_1^{\varkappa}\hat{p}_1} - \Phi^{\widetilde{s_1}}_{\hat{p}_1^1\ldots\hat{p}_1^{\varkappa}\hat{p}_1q_2}\,\omega^{q_2} - \Phi^{\widetilde{s_1}}_{\hat{p}_1^1\ldots\hat{p}_1^{\varkappa}\hat{p}_1\hat{p}_1}\,\omega^{q_1};\ \omega^{p_1}] = 0,$$

$$dx^J = \Xi^J_{p_2}(X)\,\omega^{p_2} + X^J_{\hat{p}_1}\omega^{\hat{p}_1}, \tag{8}$$

$$dX^J_{\hat{p}_1^1\ldots\hat{p}_1^{\varkappa}} = \Xi^J_{\hat{p}_1^1\ldots\hat{p}_1^{\varkappa}p_2}\,\omega^{p_2} + X^J_{\hat{p}_1\ldots\hat{p}_1^{\varkappa}\hat{p}_1}\,\omega^{p_1},$$

$$[dX^J_{\hat{p}_1^1\ldots\hat{p}_1^{\varkappa}\hat{p}_1} - \Xi^J_{\hat{p}_1\ldots\hat{p}_1^{\varkappa}\hat{p}_1q_2}\,\omega^{q_2} - \Xi^J_{\hat{p}_1^1\ldots\hat{p}_1^{\varkappa}\hat{p}_1\hat{q}_1}\,\omega^{q_1};\ \omega^{p_1}] = 0$$

$$(\varkappa = 1, \ldots, \nu).$$

При этом система функций

$$X^J;\ \Lambda^{s_1}_{\hat{p}_1},\ X^J_{\hat{p}_1};\ \ldots;\ \Lambda^{\widetilde{s_1}}_{\hat{p}_1^1\ldots\hat{p}_1^{\nu}},\ X^J_{\hat{p}_1^1\ldots\hat{p}_1^{\nu}} \tag{9}$$

определяет поле геометрического объекта (поле продолженного объекта порядка ν*).*

В частности, сама система дифференциальных уравнений погруженного многообразия (4) *правильно продолжаема и система функций*

$$\Lambda^{\widetilde{s_1}}_{\hat{p}_1};\ \ldots;\ \Lambda^{\widetilde{s_1}}_{\hat{p}_1^1\ldots\hat{p}_1^{\nu}} \tag{10}$$

определяет поле геометрического объекта (внутреннее фундаментальное поле порядка ν*).*

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму.

Л е м м а. *Если структура пфаффовых форм* θ^J $(J, K, L = 1, \ldots, N)$ *с базисом* $\theta^{\hat{J}}$ $(\hat{J}, \hat{K}, \hat{L} = 1, \ldots, \hat{N};\ \hat{N} \leqslant N)$ *определяется внешними дифференциальными уравнениями вида*

$$D\theta^J = [\theta^{\hat{K}}\theta^J_{\hat{K}}], \tag{11}$$

то структура входящих в эти уравнения форм $\theta^J_{\hat{K}}$ *определяется уравнениями такого вида*:

$$D\theta^J_{\hat{K}} = [\theta^{\hat{L}}_{\hat{K}}\,\theta^J_{\hat{L}}] + [\theta^J_{\hat{K}\hat{L}}\,\theta^{\hat{L}}],\ \ [\theta^J_{\hat{K}\hat{L}}\,\theta^{\hat{K}}\theta^{\hat{L}}] = 0. \tag{12}$$

Отсюда следует, что если пфаффова система

$$\theta^J = 0 \quad (J = 1, \ldots, N)$$

с базисом $\theta^{\hat{J}}$ ($\hat{J}=1, \ldots, N$; $\hat{N} \leqslant N$) вполне интегрируема, то усеченная пфаффова система

$$\theta^{\alpha}=0 \quad (\alpha=n+1, \ldots, N; \quad n \leqslant \hat{N})$$

правильно продолжаема относительно линейно независимых форм θ^k ($k=1, \ldots, n$), т. е. на любом этапе продолжения внешние билинейные уравнения системы имеют вид

$$[\theta_k\, \theta^k]=0.$$

6. Таким образом, если задана система дифференциальных уравнений (5) некоторого исходного поля геометрического объекта на погруженном многообразии (4) («многообразие снабжено внешним оснащением»), то, вообще говоря, мы можем строить бесконечную последовательность продолженных полей («последовательность фундаментальных полей оснащенного погруженного многообразия»), из которых каждое последующее охватывает все предыдущие. Эта последовательность содержит подпоследовательность внутренних фундаментальных полей (10), к которой сводится вся фундаментальная последовательность, когда оснащающее поле отсутствует.

Задачей дифференциально-геометрического-исследования погруженного многообразия является изучение его фундаментальных полей и полей, ими охватываемых.

Примерами таких полей на поверхности евклидова пространства могут служить поля значений коэффициентов первой и второй квадратичных форм, конгруенции метрических и аффинных нормалей, семейство проективных канонических пучков, семейство квадрик Ли и т. д.

7. Теорема существования основного поля. *В общем случае на погруженном многообразии существует фундаментальное поле, система дифференциальных уравнений которого разрешима относительно всех вторичных форм ω^{s_2}. Это поле охватывает поля с любыми образующими объектами.*

Такое фундаментальное поле наинизшего порядка мы назовем полным.

Теорема полноты. *В общем случае на погруженном многообразии существует фундаментальное поле, через компоненты которого и их дифференциалы выражаются все базисные инвариантные формы $\omega^{s_{12}}$. Надлежащее задание компонент этого поля определяет погруженное многообразие с точностью до преобразования фундаментальной группы G.*

Такое фундаментальное поле наинизшего порядка мы назовем полным.

Алгебраическое исключение всех базисных инвариантных форм $\omega^{s_{12}}$ из системы дифференциальных уравнений (8) полного фундаментального поля приводит к системе, содержащей только компоненты этого поля и их дифференциалы. Выполнение этой системы есть необходимое и достаточное условие существования погруженного многообразия с данным полным фундаментальным полем.

8. Предлагаемый метод целиком приложим и к многообразиям, погруженным в пространство геометрических элементов со связностью [3].

Поступило
21 II 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Метод внешних форм, 1948. [2] Г. Ф. Лаптев, ДАН, 65, № 2 (1949). [3] Г. Ф. Лаптев, ДАН, 73, № 1 (1950).