Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

М. С. ГОРНШТЕЙН

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

*(Представлено академиком М. В. Келдышем 21 III 1951)*

1. Пусть требуется найти вещественный корень уравнения

$$f(x) = 0,$$

содержащийся в интервале $(a, b)$, $a < b$. Представим это уравнение в виде

$$x = \varphi_n(x;\ \xi), \tag{1}$$

где

$$\varphi_n(x;\ \xi) = x - H_n(x;\ \xi) f(x), \tag{2}$$

а $H_n(x;\ \xi)$ — полином $n$-й степени по $x$, коэффициенты которого зависят от произвольно фиксированного в интервале $[a, b]$ числа $\xi$, $a \leqslant \xi \leqslant b$:

$$H_n(x;\ \xi) = \sum_{k=0}^{n} h_k(\xi)\, x^k. \tag{3}$$

Коэффициенты $h_k(\xi)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ выберем так, чтобы выполнялись условия:

$$\varphi_n'(\xi;\ \xi) = \varphi_n''(\xi;\ \xi) = \ldots = \varphi_n^{(n+1)}(\xi;\ \xi) = 0 \tag{4}$$

(дифференцирование ведется по $x$), что даст нам $n+1$ уравнений для определения $n+1$ коэффициентов $h_k$.

Разложив $\varphi_n(x;\ \xi)$ как функцию от $x$ по степеням $x - \xi$, получим, принимая во внимание (4):

$$\varphi_n(x;\ \xi) = \varphi_n(\xi;\ \xi) + r_n(x;\ \xi), \tag{5}$$

где

$$r_n(x;\ \xi) = \frac{\varphi_n^{(n+2)}(\bar{\xi};\ \xi)}{(n+2)!}(x - \xi)^{n+2} \quad (a < \bar{\xi} < b). \tag{6}$$

Обозначив приближенное значение корня через $x_1$ и положив

$$x_1 = \varphi_n(\xi;\ \xi), \tag{6'}$$

вместо (1) мы, согласно (5), найдем, что погрешность равна $r_n(x;\ \xi)$. Отсюда заключаем, что если $r_n(x;\ \xi) > 0$ в интервале $[a, b]$, то найденное значение корня будет с недостатком, а при $r_n(x;\ \xi) < 0$ оно будет с избытком. Что касается абсолютной величины погрешности, то из (6) получаем, обозначив $R_n = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |r_n(x;\ \xi)|$,

$$R_n < \frac{M_n}{(n+2)!}\eta^{n+2}, \tag{7}$$

где

$$M_n = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi_n^{(n+2)}(x;\xi)|,\ \eta = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |x-\xi|.$$

Условимся называть степень полинома $H_n(x;\ \xi)$ **порядком приближения корня**. Соотношение (7) показывает, что с увеличением порядка приближения на единицу погрешность, вообще говоря, умножается на $\eta$ (предполагается $\eta < 1$).

2. Для определения коэффициентов $h_k$ дифференцируем (2); принимая во внимание (3), получим

$$\varphi'_n(x;\ \xi) = 1 - h_0 f'(x) - h_1[f(x) + xf'(x)] - \ldots - h_n[nx^{n-1}f(x) + x^n f'(x)].$$

Обозначив $A_k(x) = kx^{k-1}f(x) + x^k f'(x)$, мы можем предыдущее равенство записать в виде

$$\varphi'_n(x;\ \xi) = 1 - h_0A_0(x) - h_1A_1(x) - \ldots - h_nA_n(x).$$

Условия (4) дают

$$h_0A_0(\xi) + h_1A_1(\xi) + \ldots + h_nA_n(\xi) = 1,$$

$$h_0A'_0(\xi) + h_1A'_1(\xi) + \ldots + h_nA'_n(\xi) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_0A_0^{(n)}(\xi) + h_1A_1^{(n)}(\xi) + \ldots + h_nA_n^{(n)}(\xi) = 0.$$

Определитель этой системы запишем сокращенно

$$\Gamma_n(\xi) = |\,A_0^{(m)}(\xi)\quad A_1^{(m)}(\xi)\ \ldots\ A_n^{(m)}(\xi)\,|_n^0.$$

Это нужно понимать так: в первой строчке $m = 0$, во второй $m = 1$ и т. д., в последней $m = n$. Алгебраические дополнения этого определителя, соответствующие элементам первой строки, обозначим $\Gamma_{nk}$ $(k = 0,\ 1, \ldots,\ n)$:

$$\Gamma_{nk}(\xi) = (-1)^k\,|\,A_0^{(m)}(\xi)\quad A_1^{(m)}(\xi)\ldots A_{k-1}^{(m)}(\xi)\quad A_{k+1}^{(m)}(\xi)\ldots A_n^{(m)}(\xi)\,|_n^1.$$

Функция $\varphi_n(x;\ \xi)$ будет

$$\varphi_n(x;\ \xi) = x - \frac{f(x)}{\Gamma_n(\xi)}\sum_{k=0}^{n}\Gamma_{nk}(\xi)\,x^n \tag{8}$$

при условии, что $\Gamma_n(\xi) \neq 0$.

3. Определители $\Gamma_n(\xi)$ и $\Gamma_{nk}(\xi)$ можно преобразовать, выражая их непосредственно через $f(x)$ и ее производные. Преобразование дает, если обозначить $S_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$,

$$\Gamma_n(\xi) = \begin{vmatrix} f' & S_1^1 f & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ f'' & S_2^1 f' & S_2^2 f & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^{(n)} & S_n^1 f^{(n-1)} & S_n^2 f^{(n-2)} & \ldots & S_n^{n-1} f' & S_n^n f \\ f^{(n+1)} & S_{n+1}^1 f^{(n)} & S_{n+1}^2 f^{(n-1)} & \ldots & S_{n+1}^{n-1} f'' & S_{n+1}^n f' \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Здесь $f^{(k)} = f^{(k)}(\xi)$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1)$. Предполагается, что все фигурирующие здесь производные существуют и непрерывны в рассматриваемом интервале.

Обозначив алгебраические дополнения последнего определителя, соответствующие элементам первой строки, через $\gamma_{nk}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, найдем

$$\Gamma_{nk}(\xi) = \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} C_r^{r-k} \gamma_{nr}(\xi)\, \xi^{r-k} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n), \tag{10}$$

где обозначено $C_r^m = \frac{r(r-1)\ldots(r-m+1)}{m!}$.

Кроме того, будем иметь

$$\Gamma_n(\xi) = f'(\xi)\,\gamma_{n0}(\xi) + f(\xi)\,\gamma_{n1}(\xi). \tag{11}$$

Примечание. При $n = 0$ получаем $\varphi_0(x;\ \xi) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ и приближенное значение корня будет $x_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$; это — формула Ньютона.

4. Пример. Найти вещественный корень уравнения

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Имеем $f(2) = -1$, $f(2{,}1) = 0{,}061$. Корень лежит в интервале $(2;\ 2{,}1)$. Положим $a = 2$, $b = 2{,}1$ и возьмем $\xi = 2$.

Применяя приближение третьего порядка, получим: $\gamma_{30} = 24\cdot 12\cdot 1121$, $\gamma_{31} = -24\cdot 12\cdot 646$, $\gamma_{32} = 24\cdot 12\cdot 266$, $\gamma_{33} = -24\cdot 12\cdot 95$.

По формуле (10): $\Gamma_{30} = \gamma_{30} - \gamma_{31}\xi + \gamma_{32}\xi^2 - \gamma_{33}\xi^3$, $\Gamma_{31} = \gamma_{31} - 2\gamma_{32}\xi + 3\gamma_{33}\xi^2$, $\Gamma_{32} = \gamma_{32} - 3\gamma_{33}\xi$, $\Gamma_{33} = \gamma_{33}$. Числовые значения: $\Gamma_{30} = 12\cdot 24\cdot 4237$, $\Gamma_{31} = -12\cdot 24\cdot 2850$, $\Gamma_{32} = 12\cdot 24\cdot 836$, $\Gamma_{33} = -12\cdot 24\cdot 95$. По формуле (11) $\Gamma_3 = f'\gamma_{30} + f\gamma_{31}$, $\Gamma_3 = 12\cdot 24\cdot 11856$.

Согласно (8) будем иметь:

$$\varphi_3(x;\ 2) = x - \frac{4237 - 2850x + 836x^2 - 95x^3}{11856} f(x)$$

и, по (6'):

$$x_1 = 2 - \frac{4237 - 2850\cdot 2 + 836\cdot 4 - 95\cdot 8}{11856}\cdot(-1). \tag{12}$$

Определим погрешность по (7):

1) $\varphi_3^{\mathrm{V}}(x;\ 2) = \frac{30}{1482}(285x - 418)$ и, по (6): $r_3(x;\ 2) = \frac{30(285\,\overline{\xi} - 418)}{1482\cdot 5!}(x-2)^5$

$(2 < \overline{\xi} < 2{,}1)$. $r_3(x;\ 2) > 0$ в интервале $(2;\ 2{,}1)$. Следовательно, корень будет вычислен с недостатком.

2) Найдем абсолютную величину погрешности:

$$M_3 = \max_{2 \leqslant x \leqslant 2{,}1} |\varphi_3^{\mathrm{V}}(x;\ 2)| = \frac{30(285\cdot 2{,}1 - 418)}{1482} = 30\,\frac{180\cdot 5}{1482}.$$

$R_3 < \frac{30\cdot 180{,}5\cdot 0{,}1^5}{1482\cdot 5!}$. Окончательно $R_3 < 3{,}05\cdot 10^{-7}$.

Вычисление выражения (12) даст $x_1 = 2{,}0945513\ (+\,0{,}000000305)$, в скобках указана максимальная возможная погрешность.

5. Вычислим этот же корень, исходя из другого интервала. Непосредственная подстановка даст $f(2{,}09) = -0{,}05$, а так как $f(2{,}1) = 0{,}061$, то корень лежит в интервале $(2{,}09;\ 2{,}10)$.

Примем $\xi = 2{,}1$ и, применяя приближение первого порядка, найдем

$$\varphi_1(x;\ 2{,}1) = x - \frac{24{,}46 - 6{,}3x}{125{,}7286} f(x). \tag{13}$$

Оценка погрешности:

$$r_1(x;\ 2{,}1) = \frac{6(12{,}6\bar{\xi} - 12{,}23)}{62{,}8643 \cdot 3!}(x - 2{,}1)^3 \qquad (2{,}09 < \bar{\xi} < 2{,}1).$$

Так как $r_1(x;\ 2{,}1) < 0$ в интервале $[2{,}09,\ 2{,}1]$, то корень будет вычислен с избытком. Абсолютная величина погрешности $R_1 < 2{,}3 \cdot 10^{-7}$.

Приближенное значение корня будет $x_1 = \varphi_1(2{,}1;\ 2{,}1)$, т. е., по (13): $x_1 = 2{,}09455152\ (-2{,}3 \cdot 10^{-7})$.

Примечание. Этот метод можно применить и к определению комплексных корней уравнения $f(z) = 0$, где $f(z)$ — аналитическая функция.

Московский энергетический институт
им. В. М. Молотова

Поступило
27 II 1951